

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG (SUISSE)

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES LETTRES

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTEUR

PAR

L.-J. DELAPORTE

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR LES

GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

COMMISSION D'EXAMEN

Le Doyen : **M. Julius JUTHNER.**

Rapporteurs : { **M. François DANIELS**, de la Faculté des Sciences.
 { **P. Leo MICHEL**, O. P.

Autres examinateurs : { **P. Gallus MANSER**, O. P.
 { **M. Hubert GRIMME.**

PARIS

C. NAUD, ÉDITEUR

3, RUE RACINE, 3

—
1903



Digitized by the Internet Archive
in 2026

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG (SUISSE)

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES LETTRES

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTEUR

PAR

L.-J. DELAPORTE

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

ESSAI PHILOSOPHIQUE

SUR LES

GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

COMMISSION D'EXAMEN

Le Doyen : **M. Julius JÜTHNER.**

Rapporteurs : { **M. François DANIËLS**, de la Faculté des Sciences.
 { **P. Leo MICHEL**, O. P.

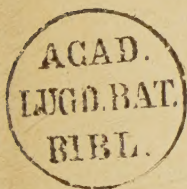
Autres examinateurs : { **P. Gallus MANSER**, O. P.
 { **M. Hubert GRIMME.**

PARIS

C. NAUD, ÉDITEUR

3, RUE RACINE, 3

1903



UNIVERSITÉ DE FRIBOURG (SUISSE)

FACULTÉ DES LETTRES

Philosophie et histoire de la philosophie ancienne et médiévale.	P. Gallus MANSER, O. P.
Philosophie et histoire de la philosophie moderne.. . . .	P. Leo MICHEL, O. P.
Pédagogie.	M. Raphael HORNER.
Égyptologie et Assyriologie.. . . .	M. Jean-Jacques HESS.
Langues et littératures sémitiques.	M. Hubert GRIMME.
Philologie grecque.	M. Julius JÜTHNER.
Langue et littérature latines.	M. Gustave MICHAUT.
Philologie romane.	M. Paul MARCHOT.
Littérature française.. . . .	M. Victor GIRAUD.
Langues et littératures germaniques.	M. Konrad ZWIERZINA.
Langues et littératures slaves.	M. Stanislaus DOBRZYCKI.
Histoire de l'art.	M. Joseph ZEMP.
Science et histoire de la musique.	M. Peter WAGNER.
Paléographie et diplomatique.	M. Franz STEFFENS.
Histoire suisse. Histoire générale de l'anti- quité.	M. Albert BÜCHI.
Histoire générale du moyen âge.	M. Gustav SCHNÜRER.
Histoire générale des temps modernes.	M. Heinrich REINHART.
Introduction à l'étude de l'histoire. Histoire grecque et romaine.	M. Karl HOLDER.

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

A MA MÈRE

Hommage respectueux et filial.

INTRODUCTION

La géométrie, qui depuis plus de deux mille ans semblait avoir atteint à peu près la perfection à laquelle puisse aspirer une science humaine, a été attaquée, au cours du siècle qui vient de finir, par des mathématiciens de premier ordre, et l'on a vu s'élever contre le système admis depuis Euclide des théories nouvelles qui ont la prétention de former une *géométrie générale*, dont ce système serait un cas particulier.

Ces théories, souvent appelées géométries non-euclidiennes, parce qu'elles rejettent certaines propositions fondamentales de la géométrie d'Euclide, ont, depuis un quart de siècle surtout, attiré l'attention des philosophes et donné lieu à des discussions fort intéressantes ; mais la plupart de ceux qui ont traité ces questions, oubliant qu'il n'appartient pas à la géométrie de répondre à ceux qui attaquent ses principes, ont voulu faire sortir de ces systèmes des conclusions philosophiques sur des problèmes tels que les fondements de la géométrie ou le nombre des dimensions de l'espace.

C'est par la méthode inverse que nous essayerons, après avoir recherché quelles sont les notions métaphy-

siques que nous avons sur l'espace géométrique, de déterminer quelle géométrie répond le mieux à ces notions.

Comme fondement de cette étude, il a paru nécessaire de donner un double aperçu des géométries non-euclidiennes. Dans le chapitre premier nous considérerons donc leur développement historique, non point dans toute son extension, — ce qui serait sortir des limites que je me suis tracées, — mais seulement autant qu'il est nécessaire pour comprendre *pourquoi* et *comment* se sont formées ces géométries. A ce point de vue, c'est la première des trois périodes que distinguent MM. Klein et Russell qui seule nous intéresse et c'est sur les auteurs de cette période que nous porterons notre attention. J'ai évité autant que possible tout ce qui n'a pas trait directement au but poursuivi ; c'est pourquoi on ne trouvera qu'à la fin de l'ouvrage, en appendice, les indications bibliographiques.

Le second chapitre présente l'exposition méthodique des géométries non-euclidiennes, avec les explications nécessaires pour l'intelligence de certaines expressions mathématiques qu'il était impossible d'éviter. Il en ressort que ces géométries sont actuellement constituées comme systèmes logiques reposant sur les définitions d'une première ligne, d'une première surface, d'un premier espace.....

C'est l'étude de ces définitions et leur comparaison avec les définitions d'Euclide qui forment le fond de ce travail. Et puisque toute définition porte sur un concept qu'il s'agit d'exprimer par le langage, nous consacrerons le chapitre troisième à rechercher quels sont les éléments

qui entrent dans la notion d'espace géométrique, et nous pourrons déjà constater que les nouvelles théories ne reposent pas sur cette notion, prise dans toute sa généralité. Le chapitre suivant complète ces premières vues, en montrant que les définitions sur lesquelles se basent ces systèmes sont moins intuitives, et par conséquent moins bonnes que celles qui leur correspondent dans la géométrie d'Euclide.

Un cinquième chapitre aborde la question des dimensions de l'espace, question qui est soulevée indirectement par l'exposition méthodique des géométries non-euclidiennes, et directement par les travaux de la seconde et de la troisième période du développement de ces géométries. Aucun fait précis n'ayant été allégué, qui nécessite l'hypothèse d'une quatrième dimension de l'espace, nous nous contenterons de signaler quelles analogies mathématiques permettent de donner à des relations purement analytiques l'apparence d'un langage géométrique, et d'établir que l'argument de Helmholtz ne peut servir de base à une induction sur l'existence réelle de l'hyper-espace.

CHAPITRE PREMIER

APERÇU HISTORIQUE SUR LE DÉVELOPPEMENT DES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

I. — LES PRÉCURSEURS DES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

C'est dans les ÉLÉMENTS mêmes d'Euclide que l'on doit chercher le point de départ des systèmes de géométrie — communément appelés géométries non-euclidiennes — qui se sont développés au cours du siècle dernier. C'est la négation de certaines propositions non démontrées, que le géomètre grec présente comme complément nécessaire de sa définition de la ligne droite, qui a donné naissance à ces nouvelles théories mathématiques.

Si Euclide ne s'explique pas sur la validité de ces propositions, nous ne pouvons le lui reprocher, car ce n'est pas à la géométrie, mais à la philosophie, à la théorie de la connaissance, qu'il appartient de constater quelle est leur valeur. Toutefois, les mathématiciens, — et c'est leur droit — ont de tout temps cherché à réduire le nombre de ces propositions, et leurs efforts se sont portés presque exclusivement sur l'une d'elles qui ressemble davantage à un théorème et qu'instinctivement on a nommée

le postulat d'Euclide : *Si deux droites, rencontrant une autre droite, font avec elle des angles intérieurs, du même côté, dont la somme soit inférieure à deux droits, ces deux droites prolongées indéfiniment se rencontreront du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits* (1).

En parcourant le premier livre des ÉLÉMENTS, on remarque que ce postulat est en réalité la réciproque de la vingt-huitième proposition, et tout naturellement il vient à l'esprit de se demander si l'on ne pourrait combler la lacune qui semble se produire dans la suite des déductions géométriques. Mais, « ce n'est pas par hasard, fait remarquer M. Stäckel, que les vingt-huit premiers théorèmes sont absolument indépendants du cinquième postulat, appelé axiome des parallèles, et que celui-ci apparaît pour la première fois dans la démonstration du vingt-neuvième théorème ; ce n'est pas par hasard que l'angle extérieur d'un triangle est étudié en deux endroits : d'abord, dans le théorème XVI, on ne fait que montrer qu'il est plus

(1) Καὶ ἔαν εἰς δύο εὐθείας εὐθειᾶ ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὁρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειραν συμπίπτειν, ἐφ' ᾧ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὁρθῶν ἐλάσσονες.

Les manuscrits d'Euclide ne s'accordent pas sur le rôle de cette proposition. Ils la rangent tantôt parmi les Αἰτήματα (postulats), tantôt parmi les Κοινὰ ἔννοιαι (notions communes). Nous entendons par notions communes les notions premières communes à la Mathématique tout entière, et par postulats celles qui n'appartiennent qu'à la Géométrie. Nous en tenant donc à l'ordre suivi par le manuscrit du Vatican, que Peyrard a édité en 1814, nous considérons ce postulat comme le *postulat V*. Divers auteurs l'appellent axiome XI, axiome des parallèles et même axiome des trois droites. Dans la suite, nous aurons parfois à parler d'une autre proposition d'Euclide ainsi conçue : *Deux droites n'enceignent pas un espace* ; et nous l'appellerons *postulat VI* ou aussi, mais moins justement, axiome des deux droites.

grand que chacun des deux angles intérieurs opposés, et plus loin, dans le théorème XXXII, on établit que l'angle extérieur est absolument égal à la somme des deux angles intérieurs. Cette disposition autorise à conclure qu'Euclide s'est fort bien rendu compte de la difficulté cachée dans la théorie des parallèles (1) ».

On peut à peine se faire une idée des efforts tentés pendant vingt siècles pour ramener le cinquième postulat aux précédents, ou le remplacer par une proposition plus intuitive, jusqu'au jour où les travaux de Lobatschewskij, Bolyai et Beltrami sont venus montrer que ces efforts ne pouvaient aboutir. Nous n'avons pas à rappeler ces tentatives presque infructueuses des Proclus, des Nasir Eddin, des Clavius, des Wallis, des Legendre et de tant d'autres géomètres renommés : ce serait sortir de notre sujet (2). Remarquons toutefois qu'on trouve déjà chez

(1) « Es ist kein Zufall, das die ersten achtundzwanzig Sätze von der fünften Forderung, dem sogenannten Parallelenaxiom, durchaus unabhängig sind, und daß diese erst beim Beweise des neunundzwanzigsten Satzes eintritt, es ist kein Zufall, dass der Aussenwinkel des Dreiecks an zwei Stellen behandelt wird; zuerst, in Satz 16, wird nur gezeigt, dass er grösser ist als jeder der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel, und erst später, in Satz 32, stellt sich heraus, dass der Aussenwinkel der Summe jener beiden inneren Winkel genau gleich ist.

Diese Anordnung berechtigt zu den Schlusse, dass Euclid die in der Parallelen-theorie verbozgene Schwierigkeit sehr wohl durchschaut hat. » STÄCKEL, Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss, p. 3.

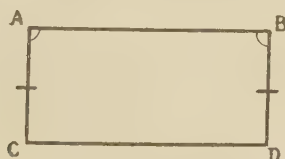
(2) M. BRUNEL, dans une *Notice sur l'influence scientifique de Guillaume-Jules Houël*, donne une liste des principaux essais; il en indique soixante-quinze rien que dans la première moitié du XIX^e siècle. (*Mém. de la Société des Sciences phys. et nat. de Bordeaux*, t. IV, 3^e série, 1888, p. 24 et suiv. en note.)

M. STÄCKEL (*op. cit.*) donne la liste complète de ces essais depuis 1482 jusqu'à 1837, avec indication des sources bibliographiques.

le jésuite Clavius et chez Giordano da Bitonto la figure sur laquelle s'appuie Saccheri (1667-1733) (1), qui, par un *essai génial* (2), abandonnant les méthodes directes de démonstration, introduisit le doute méthodique dans ses recherches pour s'assurer par la déduction de la nécessité du postulat à la base de la géométrie.

Aussi peu heureux que ses devanciers, le jésuite italien ne trouve pas la vraie solution, mais il avait ouvert une voie nouvelle qui mène logiquement au résultat, et c'est par cette voie qu'un siècle plus tard devait aboutir la découverte des géométries non-euclidiennes. S'il n'est pas l'inventeur, il est le premier précurseur des nouveaux systèmes.

Il établit tout d'abord que, *dans un quadrilatère ABCD*



dont les angles en A et en B sont droits et les côtés AC et BD égaux, les angles en C et D sont aussi égaux. De là,

(1) Né à San Remo, dans la République de Gênes, le 5 septembre 1667, Girolamo Saccheri fut admis dans la Compagnie de Jésus le 24 mars 1685. Il enseigna successivement la grammaire au Collège di Brera, à Milan, puis la philosophie et la théologie à Turin, et, à partir de 1697, les mathématiques à l'Université de Pavie. Il mourut à Milan, le 25 octobre 1733, l'année même où paraissait celui de ses ouvrages qui devait faire passer son nom à la postérité.

Cf. SOMMERVOGEL, S. J. Bibliothèque de la Compagnie de Jésus, nouvelle édition, 1896. Bibliographie, t. VII, col. 360-362.

(2) « Geistrichen Versuch. » STÄCKEL, *op. cit.*, p. 37.

trois hypothèses possibles : ces angles sont droits, aigus ou obtus. Que l'une d'elles soit vérifiée dans un seul cas, elle sera la seule vraie dans tous les cas (prop. V., VI., VII). Il faut donc montrer que les deux dernières hypothèses aboutissent à des contradictions et la nécessité du postulat sera établie. S'appuyant à tort sur la seizième proposition du premier livre des ÉLÉMENTS, proposition qui demande certaines restrictions dans l'hypothèse de l'angle obtus, Saccheri parvient assez facilement à établir que l'hypothèse contredit cette proposition qui est indépendante du postulat. La discussion de l'hypothèse de l'angle aigu est beaucoup plus longue, et malgré l'ingéniosité déployée par l'auteur, cette hypothèse ne reçoit pas — de son propre aveu — une réfutation absolument rigoureuse.

Il y a dans cet ouvrage beaucoup de propositions qui ont été attribuées à des géomètres postérieurs. Ainsi Saccheri démontre que, si le postulat V d'Euclide n'est pas vrai, deux droites situées dans un même plan se rencontrent, ou sont asymptotes l'une à l'autre, ou perpendiculaires à une droite commune à partir de laquelle elles divergent indéfiniment ; — proposition identique à celle sur laquelle Lobatschewskij a basé toute sa géométrie. C'est ainsi encore que dans la seconde partie de son œuvre (prop. XXXIV et suiv.) il considère en géométrie plane le lieu des points situés à égale distance d'une droite, lieu que les géomètres postérieurs étudient sur le nom d'horicycle.

Plus heureux que Saccheri, un géomètre suisse, Lambert (1), allait bientôt trouver la solution du cas où l'on

(1) Johann-Heinrich Lambert naquit le 26 août 1728, à Mulhouse, ville

suppose l'angle obtus, et pressentir celle qui se rapporte à l'hypothèse de l'angle aigu.

Connaissait-il l'œuvre du jésuite italien? C'est assez probable; en tous cas, le point de départ de ses recherches est à peu près le même. Tandis que Saccheri considère d'abord un quadrilatère dont deux côtés opposés sont égaux et forment avec un troisième côté des angles droits, Lambert part d'un quadrilatère trirectangle et examine successivement les trois hypothèses suivantes : le quatrième angle est droit, obtus ou aigu. Il traite à part chacune de ces hypothèses et montre facilement que la première correspond à la géométrie euclidienne; il constate que la seconde, incompatible avec le postulat VI d'Euclide, est réalisée sur la sphère (1), et que la troisième aurait lieu sur une surface qu'il nomme par analogie surface sphérique imaginaire, mais qu'il ne sait pas déterminer. « Il me semble remarquer, dit-il, que la deuxième hypothèse (angle obtus) se réalise quand, au lieu de prendre des triangles plans, on les prend sphériques, puisque dans ces triangles, la somme des angles est supérieure à 180° et l'excès est proportionnel à la surface du triangle.

qui faisait alors partie de la Confédération helvétique. En 1766, il écrivit un mémoire intitulé : « Theorie der Parallellinien ». Mais ce n'est qu'en 1786 (9 ans après la mort de l'auteur) que cet ouvrage fut publié par Johann Bernoulli, neveu du célèbre mathématicien baslois et fondateur de la revue *Magazin für die reine und angewandte Mathematik*.

(1) Bien que ne l'ayant pas introduite dans ses *Éléments*, Euclide connaissait la géométrie de la sphère constituée avant lui par Eudoxe et Autolycus, et il n'est peut-être pas téméraire de penser que ce soit pour reconnaître l'insuffisance de sa définition qu'il a formulé le postulat des parallèles tous au début de son œuvre.

« Il me semble [encore] plus remarquable que cela puisse se démontrer indépendamment de la difficulté des parallèles et ne présuppose d'autre axiome, si ce n'est que tout plan passant par le centre de la sphère la partage en deux parties égales.

« Je devrais presque en tirer la conclusion que la troisième hypothèse se réalise sur une surface sphérique imaginaire. A tout le moins doit-il y avoir une raison pour laquelle elle ne se laisse pas, dans le cas des surfaces planes, détruire aussi facilement, tant s'en faut, que la seconde (1). »

S'il appelle cette surface *sphérique imaginaire*, c'est qu'il a constaté que, dans la troisième hypothèse, l'aire d'un triangle est proportionnelle au déficit angulaire, c'est-à-dire à la différence entre 180 degrés et la somme des trois angles du triangle. Et, en effet, cette surface, comme l'a prouvé Beltrami en 1868, est analytiquement le lieu des points situés à une même distance imaginaire

(1) Hierbey scheint mir merkwürdig zu seyn, dass die zwote Hypothese statt hat, wenn man statt ebener Triangelsphärische nimmt, weil bey diesen sowohl die Summe der Winkel grösser als 180° Gr. als auch der Ueberschuss dem Flächenraume des Triangels proportional ist.

Noch merkwürdiger scheint es, dass, was ich hier von den sphärischen Triangeln sage, sich ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsatz voraussetzt, als dass jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile.

Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor [Wenigstens muss immer Etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstossen lässt, als es sich bey der zwoten thun liess. » LAMBERT. Theorie der Parallellin., § 82. Dans STÄCKEL, *op. cit.*, p. 202, 203.

d'un point réel donné. Elle porte maintenant le nom de pseudo-sphère.

Tandis qu'à l'hypothèse de l'angle droit ne correspond qu'une seule géométrie, le système d'Euclide, chacune des deux autres hypothèses laisse une certaine indétermination qui subsiste tant qu'on ne donne pas la grandeur de l'angle obtus ou aigu. Il y a une infinité de géométries correspondant à l'une et à l'autre de ces hypothèses et l'angle de la valeur duquel dépend la détermination du système s'appelle le paramètre de ce système.

A l'hypothèse de l'angle obtus correspond la *géométrie riemanienne, elliptique* (Klein) ou *doublement abstraite* (de Tilly); à l'hypothèse de l'angle aigu, la *géométrie lobatschewskienne, hyperbolique* (Klein) ou *abstraite* (de Tilly) connue aussi sous les noms de *géométrie imaginaire* (Lobatschewskij) ou *géométrie astrale* (Schweikart).

Au commencement du xix^e siècle, sous l'influence de Gauss (1777-1855) et de Schweikart (1780-1857), un neveu de ce dernier, Taurinus (1794-1874), prend place parmi les précurseurs des géométries non-euclidiennes.

Comme Saccheri et Lambert, Taurinus croit à la vérité absolue de la géométrie d'Euclide; il se refuse à admettre avec Gauss et Schweikart que la géométrie physique puisse dépendre d'un paramètre. Après Lambert, il remarque que la seconde hypothèse de celui-ci se vérifie sur la sphère et qu'elle est incompatible avec le sixième postulat. Poussant plus loin les recherches relatives à la troisième hypothèse, il établit, en supposant imaginaires les côtés d'un triangle sphérique, un certain nombre de

formules trigonométriques valables dans cette hypothèse.

II. — LES FONDATEURS DES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

Vers le même temps, à l'Université de Kazan, un jeune professeur, Nicolas Lobatschewskij (1), se livrait tout

(1) Né à Nijni-Novogorod en 1793, Nicolas-Ivanowitsch Lobatschewskij devient à 22 ans professeur de mathématiques à l'Université de Kazan. En 1826 (11/25 ou 12/26 février), il fait, en lecture publique devant la Faculté des Sciences de cette Université, une *Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*, qu'il publie en russe dans le *Courrier de Kazan*, en 1829, sous ce titre : *O natschal'ch Geometrii (Sur les fondements de la géométrie)*.

M. WASSILIEF, de Kazan, auteur d'une biographie de Lobatschewskij, a retrouvé en 1894 un cahier contenant trois essais antérieurs du géomètre russe. Dans l'un d'eux, dit-il, il pose comme fondement la notion de direction ; dans le second, il introduit des considérations sur les biangles infinis (BERTRAND, 1778, SCHULZ, 1784) ; la troisième preuve est connexe à la démonstration de Legendre, que la somme des angles d'un triangle n'est ni plus grande ni plus petite que deux droites. On voit donc que chez Lobatschewskij un travail de réflexion de plusieurs années a précédé la publication en 1826 de ses vues particulières sur la théorie des parallèles (D'après le texte allemand de STÄCKEL, *op. cit.*, p. 240).

Dans son ouvrage intitulé *Nouveaux principes de Géométrie, avec une théorie complète des parallèles*, prenant pour point de départ que deux distances AB et $A'B'$ sont égales si on peut faire coïncider deux points C et D d'un système solide successivement avec AB et $A'B'$, Lobatschewskij définit la sphère comme lieu des points équidistants d'un point fixe ; le cercle, par l'intersection de deux sphères égales ; le plan est le lieu des intersections de deux sphères égales, quand varie la distance au point fixe d'un point quelconque de la sphère ; et la ligne droite, le lieu des points qui restent immobiles quand le plan se meut autour de deux de ses points rendus fixes.

Cette étude n'ayant pas eu de succès auprès du public russe (Cf. Avant-

entier aux recherches géométriques sur la théorie des parallèles et donnait son nom au système indépendant du cinquième postulat. Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent, dit-il, se distribuer par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes savoir : en droites qui coupent la droite donnée et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite parallèlement à la droite donnée (prop. XVI). Lobatschewskij supprime donc arbitrairement le cas où toutes les droites du plan rencontreraient la droite donnée, c'est-à-dire l'hypothèse de l'angle obtus des Saccheri, des Lambert, des Taurinus ; mais il a sur eux l'avantage de montrer dès l'abord que sa proposition, plus générale que celle d'Euclide, revient au postulat dès qu'on admet que le faisceau des non-sécantes se réduit à une seule droite.

Le géomètre grec, en effet, appelle parallèles deux droites qui, situées dans un même plan, ne se rencontrent pas quelque loin qu'on les prolonge, et démontre à l'aide du postulat que dans un plan, par un point extérieur à une droite donnée, on ne peut mener qu'une seule droite qui ne la rencontre pas.

Son hypothèse posée, le géomètre russe établit que :

propos des Recherches géométriques), l'auteur se décida à publier en allemand ce qu'il y a d'essentiel dans ses recherches. De là ses *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelen*, parues à Berlin en 1840. C'est la plus connue de ses œuvres ; elle a été traduite en français par Houël.

Lobatschewskij continua toute sa vie l'étude de cette Géométrie qu'il avait nommée *Géométrie imaginaire*. Il publia un certain nombre de travaux qui ont été réunis par l'Université de Kazan.

Dans tout triangle rectiligne, la somme des 3 angles ne peut surpasser deux droits (prop. XIX) ;

Si, dans un triangle rectiligne quelconque, la somme des trois angles est égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle (prop. XX) (1) ;

Si deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque sera égale à π (prop. XXII).

Abordant la géométrie de la sphère, il établit (prop. XXXII) qu'un cercle dont le rayon va croissant se change à la limite en une ligne courbe, qu'il appelle *horicycle*, telle que toutes les perpendiculaires élevées sur les milieux de ses cordes sont parallèles entre elles ; la surface qu'elle engendre en tournant autour d'un de ses axes porte le nom d'*horisphère*. L'horicycle et l'horisphère de la géométrie lobatschewskienne ne sont autres que les figures appelées ligne droite et plan en géométrie euclidienne.

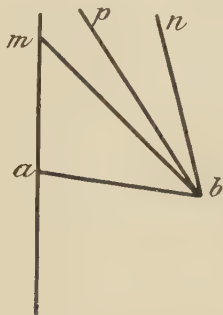
La trigonométrie sphérique est la même dans la géométrie de Lobatschewskij que dans celle d'Euclide, tandis que la trigonométrie plane diffère profondément dans les deux systèmes.

Indépendamment de Lobatschewskij, et par une méthode analogue, un capitaine du génie autrichien, Jean Bolyai (2), cherchait aussi la solution du problème des

(1) Ces propositions avaient déjà été étudiées par SACCHERI, LAMBERT et TAURINUS.

(2) Jean Bolyai (1802-1860) était un capitaine du génie, fils d'un professeur de mathématiques au Collège de Maros-Vásárhely, en Transylvanie. Outre ce qu'il a publié, il a laissé un certain nombre de papiers manuscrits, qui appartiennent à la bibliothèque de ce Collège.

parallèles. Si une demi-droite AM , dit-il, n'est pas coupée par une demi-droite BN , située dans le même plan, mais qu'elle soit coupée par toute autre demi-droite BP , comprise



dans l'angle ABN , on dira que la demi-droite BN est parallèle à la demi-droite AM (§ 1). Il affirme que pour tout point B pris en dehors d'une droite il existe toujours une parallèle et supprime ainsi arbitrairement l'hypothèse très intéressante du cas où toutes les droites d'un plan se rencontrent. Il étudie l'horicycle et l'horisphère, établit que, en géométrie euclidienne, la trigonométrie sphérique est indépendante du postulat, et montre le moyen de calculer les lignes, aires et volumes (1), même de faire la quadrature du cercle, dans le système non euclidien.

Il existe, tout à l'avantage de Bolyai, une différence entre ses recherches et celles de Lobatschewskij. « Ce dernier, remarque M. Léchalas (2), a fait comme les

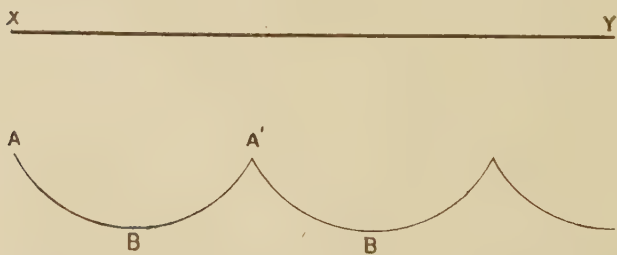
(1) LOBATSCHESKIJ a aussi publié des recherches sur la mesure des lignes, aires et volumes dans les *Mémoires de l'Université de Kazan* et dans le *Journal de Crelle* (t. XVII, 1837).

(2) *Annales de philosophie chrétienne*, 1896, nouv. série, t. XXXIII, p. 663.

auteurs de la trigonométrie qui prennent le rayon du cercle pour unité, tandis que l'officier du génie autrichien a mis en évidence, dans ses formules, le paramètre qui caractérise chaque surface. C'est là une supériorité incontestable, surtout si l'on ajoute que Lobatschewskij n'a pas fait ressortir ce choix d'une unité spéciale et a ainsi dissimulé le caractère de relativité de ses formules. »

En tenant compte de certaines réserves que l'exposé mathématique nous fera adopter, nous pouvons dire que la géométrie plane, indépendante du postulat des parallèles, est désormais constituée comme système logique, garanti par la géométrie d'Euclide elle-même, puisque tous ses théorèmes se ramènent aux propositions correspondantes de cette géométrie quand on attribue au paramètre une certaine valeur. A-t-elle une valeur objective ? S'applique-t-elle à certaines figures euclidiennes, comme il arrive pour le système qui rejette le postulat des deux droites ? Telle est la question qu'il reste à résoudre après les travaux de Lobatschewskij et de Bolyai, et dont Beltrami a donné la solution en 1868 dans son *Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidienne*.

Soit la surface engendrée par une courbe plane de la



forme $ABA'B' \dots$ tournant autour de l'axe XY situé du

côté de la concavité de la courbe. Exceptons le voisinage des arêtes de rebroussement et supposons que l'on ne puisse faire le tour de l'axe, nous aurons une figure à laquelle s'applique la géométrie indépendante du sixième postulat, la géométrie riemannienne. Sur cette surface il n'y a pas de non-sécantes, car deux géodésiques, c'est-à-dire deux lignes de plus court chemin, se rencontrent toujours. De telles surfaces, Beltrami les appelle *surfaces sphériques*, parce qu'elles jouissent, quand on les considère comme figures à deux dimensions, de propriétés analogues à celles de la sphère. Ce sont les *surfaces à courbure constante positive* des géomètres euclidiens.

Que la courbe tourne au contraire autour d'un axe situé du côté de sa convexité, avec la même restriction que précédemment, on aura une surface nommée par Beltrami, *surface pseudo-sphérique*, qui répond au système indépendant du cinquième postulat, le système lobatschewskien.

Les surfaces pseudo-sphériques sont les *surfaces à courbure constante négative* des géomètres euclidiens.

La surface qui joue par rapport à ces surfaces le même rôle que la sphère par rapport aux surfaces sphériques ou que le plan euclidien par rapport aux surfaces à courbure constante nulle porte le nom de pseudo-sphère. L'origine de cette appellation doit être cherchée, non dans des considérations géométriques, mais dans une analogie analytique.

Ce qui distingue la sphère et le plan euclidien des surfaces qui ont même courbure constante, c'est que toutes leurs sections normales ont même courbure, qui est nulle

pour le plan et a une valeur finie pour la sphère. La courbure de la surface, en un point quelconque du plan ou de la sphère, est donc égale au carré de la courbure d'une section normale quelconque, ce que nous pouvons exprimer par la formule $\frac{I}{R^2}$, en désignant par $\frac{I}{R}$ la courbure d'une section normale quelconque. Étudions la formule $\frac{I}{R^2}$. Analytiquement trois cas peuvent se présenter : l'expression $\frac{I}{R^2}$ est positive, nulle ou négative. Les deux premiers cas répondent à l'hypothèse de la sphère et à celle du plan ; le dernier ne peut être réalisé par aucune surface euclidienne, car il suppose qu'en tout point de la surface la courbure d'une section normale quelconque est *imaginaire*, et par conséquent que la surface elle-même est *imaginaire*.

La pseudo-sphère euclidienne (le plan lobatschewskien) tire donc son nom de ce qu'elle répond aux formules analytiques d'une sphère de rayon imaginaire. C'est une surface imaginaire, il n'y a de réel que la relation analytique ; et si le géomètre euclidien peut donner une interprétation du plan lobatschewskien, il ne saurait le *représenter*.

Qu'on ne vienne pas nous objecter les ingénieux systèmes de projection, établis par M. Klein au cours de la troisième période du développement des géométries non-euclidiennes ! Le géomètre qui étudie une figure imaginaire, c'est-à-dire une pure relation algébrique, peut au moyen de certaines conventions construire une figure réelle qui ait telles et telles des propriétés exprimées par la relation

algébrique ; mais il ne saurait prétendre que, puisqu'il en est ainsi, la relation algébrique qu'il étudie correspond à une figure réelle.

Des considérations précédentes il ne suit pas qu'il n'y ait aucune surface pseudo-sphérique réelle ; nous en avons signalé un exemple ; en voici un autre : la surface de révolution engendrée par une tractrice asymptote à l'axe de révolution est une surface pseudo-sphérique.

Les auteurs dont nous venons d'esquisser très rapidement les recherches mathématiques adoptent tous la méthode et les principes de la géométrie d'Euclide, exception faite du postulat V ; mais le but qu'ils poursuivent est très différent, selon qu'il s'agit des précurseurs ou des fondateurs des géométries non-euclidiennes. Ceux-là se proposent de vérifier la nécessité de cette proposition mise en doute et d'en faire ainsi la démonstration ; ceux-ci tendent au contraire à établir son indémonstrabilité en construisant un système logique basé sur la proposition contradictoire. Les premiers ont sur les seconds l'avantage de mettre en question la valeur d'un autre postulat, et les trois hypothèses qu'ils font mènent à trois systèmes distincts : la géométrie euclidienne, la géométrie dite de Lobatschewskij et de Bolyai, qui rejette le postulat V ; et enfin, la géométrie dite de Riemann, qui rejette le postulat VI.

Après eux viennent une série de savants, les Riemann, les de Tilly, les Poincaré — pour ne citer que les plus connus — qui abordent le problème à un autre point de vue, celui de la géométrie analytique. Nous n'avons point, dans cette étude, à considérer leurs travaux, si impor-

tants qu'ils puissent être, pas plus que ceux des mathématiciens qui, comme M. Klein, professeur à Göttingue, ont introduit la géométrie projective dans l'étude des systèmes non-euclidiens.

Les nouvelles géométries n'ont pas été sans jeter quelque trouble dans l'esprit d'un certain nombre de philosophes, et l'on s'est demandé si *la géométrie* considérée pendant de longs siècles comme un ensemble de vérités intangibles, allait être livrée aux disputes des écoles et perdre le caractère d'absolu qui l'élevait tant au-dessus des sciences physiques et naturelles. La géométrie d'Euclide n'est-elle pas menacée de déchéance et sera-t-elle réduite à céder le rang à une géométrie plus générale ? Nous essayerons de répondre à cette question dans les chapitres suivants.

CHAPITRE II

CONSIDÉRATIONS MATHÉMATIQUES

I. — APERÇU MATHÉMATIQUE SUR LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

Dans le courant du XIX^e siècle, on est parvenu à établir des systèmes logiques de géométrie qui rejettent l'un ou l'autre des postulats V et VI d'Euclide, et dont le développement qui se poursuit indéfiniment sans contradiction semble prouver que ces postulats ne sont pas démontrables si l'on ne s'appuie que sur les définitions d'Euclide.

On ne peut objecter que si ces systèmes n'aboutissent actuellement à aucune contradiction, on ne saurait cependant les considérer comme définitivement établis, cette contradiction pouvant se manifester quand on étendra plus loin la suite des déductions. De fait, elle ne peut se présenter, Beltrami ayant ramené ces deux géométries, en tant qu'elles ne considèrent que des droites et des plans, abstraction faite de la retournabilité — nous en verrons plus tard la raison — à n'être qu'une branche de la géométrie euclidienne, par conséquent en dehors de toute discussion.

Nie-t-on le postulat VI ; en d'autres termes, admet-on

qu'il y a au moins un couple de droites qui ont deux points communs, on en déduit tout un système (celui auquel Riemann a donné son nom) dans lequel le postulat V est toujours vrai.

Admet-on au contraire le postulat VI[?] Ou bien, par un point extérieur à une droite on ne pourra mener qu'une seule droite ne rencontrant pas la première (postulat V) et l'on sera en géométrie euclidienne, ou bien on pourra mener par ce point tout un faisceau de non-sécantes (négarion du postulat V), ce qui donnera lieu à la géométrie lobatschewskienne.

Ainsi le cinquième postulat, seul admis, conduit à la géométrie de Riemann ; le sixième seul, à la géométrie de Lobatschewskij ; et les deux postulats simultanément, à la géométrie ordinaire ou géométrie d'Euclide. Il ne saurait y avoir un quatrième système, fondé sur la négation des deux postulats, le rejet de l'un entraînant *nécessairement* la concession de l'autre.

Il y a un grand nombre de propositions communes aux trois géométries : ce sont celles qui s'établissent indépendamment des deux postulats ; par exemple, les quinze premiers théorèmes du premier livre des ÉLÉMENTS (1). D'autres propositions conviennent à deux systèmes : celles qui ne reposent que sur l'un des deux postulats, sans préjuger de la vérité ou de la fausseté de l'autre. Enfin, il y a des théorèmes propres qui caractérisent chacune des géométries.

(1) En géométrie riemannienne, il faut introduire dans plusieurs propositions des restrictions provenant de ce que la droite a une longueur finie.

Supposé que deux droites passant par un point A ont un second point d'intersection B, on démontre que toutes les autres droites du plan des deux premières, qui passent par A, passent aussi par B; et que deux droites quelconques passant par un point C du plan se coupent en un second point D, situé à la même distance de C que B de A.

La droite riemannienne est une ligne fermée de longueur $2 \overline{AB}$. Beltrami a montré que c'est la *géodésique* d'une surface euclidienne à courbe constante positive : une telle surface, nous l'appelons sphère en géométrie ordinaire.

Dans un triangle riemannien, la somme des trois angles est *supérieure* à deux angles droits et l'aire du triangle, toujours finie, est proportionnelle à son *excès* angulaire, c'est-à-dire à la différence entre la somme de ses angles et deux droits. — Deux triangles équiangles sont égaux et il n'y a pas de similitude.

La trigonométrie plane riemannienne est identique à la trigonométrie sphérique euclidienne. Quant à la trigonométrie sphérique elle est égale à la trigonométrie sphérique euclidienne, qui se retrouve aussi en géométrie lobatschewskienne.

Deux droites d'un plan lobatschewskien se rencontrent, ou sont asymptotes l'une à l'autre, ou divergent indéfiniment à partir d'une perpendiculaire commune (théorème XXIV de Saccheri). — [Cf. proposition 16 de Lobatschewskij, p. 17].

Dans un triangle lobatschewskien, la somme des trois angles est *inférieure* à deux angles droits, et l'aire du

triangle est proportionnelle à son *déficit* angulaire, c'est-à-dire à la différence entre deux droits et la somme de ses angles. Quelque grand que soit un triangle, sa surface est donc toujours inférieure à une limite finie. Deux triangles équiangles sont égaux et il n'y a pas de similitude.

La trigonométrie plane lobatschewskienne correspond à la trigonométrie de la géométrie hyperbolique euclidienne. Quant à la trigonométrie sphérique, elle ne diffère pas de la trigonométrie euclidienne.

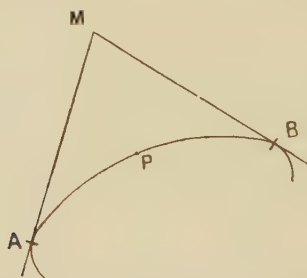
La droite lobatschewskienne, ainsi que l'a établi Beltrami, est la géodésique d'une surface à courbure constante négative, surface qui a reçu le nom de pseudo-sphère.

La géométrie euclidienne a pour droite la géodésique du plan euclidien, surface à courbure constante nulle.

II. — LA COURBURE EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Les trois géométries fondées — nous avons dit comment — sur les postulats V et VI sont donc caractérisées, au point de vue euclidien, par la courbure de leurs *plans*. Étudions sommairement la théorie de la courbure.

Soit APB un arc de courbe plane euclidienne quel-



conque dont tous les points sont des points simples : on

appelle *courbure de l'arc* $\widehat{APB}$ l'angle $\widehat{AMB}$ des tangentes à la courbe menées par les deux points extrêmes A et B ; *courbure moyenne*, le rapport de l'angle $\widehat{M}$ à la longueur de l'arc $\widehat{APB}$, et *courbure au point A* la limite vers laquelle tend la courbure moyenne, quand le point B se rapproche immédiatement du point A.

La courbure d'une courbe en l'un de ses points arbitrairement choisi s'établit très simplement par la considération du *cercle osculateur*, position-limite d'un cercle passant par le point considéré et par deux points de la courbe infiniment voisins. On démontre que l'inverse de la courbure est analytiquement une ligne égale au rayon du cercle osculateur : cette ligne s'appelle le *rayon de courbure* de la courbe au point considéré.

Le rayon de courbure et conséquemment la courbure elle-même, sont dits *positifs* ou *négatifs* suivant que le rayon du cercle osculateur, qui aboutit au point de contact, se trouve d'un côté de la figure arbitrairement choisi comme positif ou du côté opposé.

Si en tout point d'une courbe plane euclidienne le rayon du cercle osculateur est le même, on dit que la courbure est *constante* : la droite, dont la courbure est nulle, et le cercle, dont la courbure est égale à l'inverse du rayon, sont les seules lignes planes euclidiennes à courbure constante.

La courbure d'une surface euclidienne s'établit d'une façon analogue. Sur une surface quelconque, si on limite par une courbe fermée une région ne présentant pas de *points singuliers* et si, par le centre d'une sphère de rayon égal à l'unité, on mène des perpendiculaires aux plans

tangents à la surface aux divers points de la courbe, le rapport de la région limitée par la courbe sur la surface à la région découpée sur la sphère par l'ensemble de ces droites est appelé, depuis Gauss, la *courbure intégrale* de la région considérée. A la limite, quand la courbe s'évanouit et se réduit à un point, on obtient la *courbure totale* de la surface en ce point.

Le calcul de la courbure totale d'une surface en un point donné peut se ramener à celui de la courbure de deux courbes planes. On établit que la courbure d'une courbe quelconque tracée sur la surface et passant par ce point est celle de la *section normale* correspondante, c'est-à-dire de la ligne intersection de la surface et du plan qui contient la normale à la surface et la tangente à la courbe en ce point. La courbure des sections normales relatives à un même point varie d'ordinaire entre un maximum et un minimum qui ont lieu pour deux sections perpendiculaires l'une à l'autre ; ces sections s'appellent *sections normales principales* et leurs rayons de courbure, *rayons de courbure principaux*. La courbure totale de la surface au point considéré est égale au produit des courbures des sections principales relatives à ce point. Suivant que ces courbures sont de même sens ou de sens opposé, la courbure de la surface est positive ou négative.

Dans l'étude des géométries non-euclidiennes, nous n'avons à considérer que le cas où la courbure est constante en tout point de la surface considérée, c'est-à-dire le cas où le produit des rayons de courbure principaux est constant. Trois solutions peuvent se présenter, selon que ce produit est nul, positif ou négatif : à chacune de ces solutions cor-

respond un groupe de surfaces euclidiennes appelées respectivement surfaces planes, sphériques ou pseudo-sphériques.

Les surfaces planes ont pour type le plan. Toutes les sections normales passant par un point quelconque du plan ont même courbure nulle, puisque ce sont des lignes droites. Les autres surfaces à courbure constante nulle sont celles dont le plan tangent contient une droite de la surface et est tangent tout le long de cette droite. Une propriété exclusive de ces surfaces, c'est d'être développables sur le plan ; en d'autres termes, on peut les appliquer sur un plan sans duplication ni déchirure et par conséquent on peut aussi les enrouler les unes sur les autres dans les mêmes conditions. Telles sont les surfaces cylindriques, engendrées par le déplacement d'une droite qui reste parallèle à elle-même, les surfaces coniques engendrées par une droite mobile passant par un point fixe, et en général toutes les surfaces que l'on peut créer par le déplacement d'une droite.

Les surfaces sphériques ont pour type la sphère. Toutes les sections normales en un point quelconque de la sphère ont même courbure puisqu'elles sont toutes des grands cercles. Les autres surfaces à courbure constante positive sont, en général, les surfaces applicables sur la sphère sans duplication ni déchirure.

Les surfaces pseudo-sphériques ne peuvent avoir de type proprement dit : la pseudo-sphère est, en effet, une surface dont toutes les sections normales en un point quelconque ont un rayon de courbure imaginaire. Ces sections sont donc toutes imaginaires, et la surface elle-même ne saurait être réelle.

La plus simple des surfaces pseudo-sphériques ressemble, suivant une remarque de M. Delbœuf, à une fleur de liseron, dont la partie effilée se prolongerait asymptotiquement à l'axe de la figure.

Les surfaces-types se distinguent des autres surfaces de même courbure constante et des surfaces quelconques par une propriété relative aux figures qu'on peut y tracer. Soit une surface quelconque, un ellipsoïde à axes inégaux, par exemple ; deux triangles, dont les côtés sont égaux en longueur chacun à chacun, découpés dans cette surface, ne peuvent en général être amenés à coïncider sans duplication ou déchirure, parce que les angles compris entre côtés égaux sont différents.

Sur une surface à courbure constante, un cylindre à directrice fermée, par exemple, une figure peut changer de position en conservant ses côtés et ses angles ; mais il peut se produire dans certains déplacements des intersections supplémentaires ; c'est le cas d'un triangle dont un côté plus long que la directrice fermée se meut de façon que ce côté devienne parallèle à cette directrice. Dans tous les déplacements possibles sur la surface, les lignes de la figure considérée gardent la même longueur et les angles qu'elles forment primitivement par leurs intersections demeurent constants : la configuration interne de la figure est invariable. On dit que la surface reste *égale à elle-même d'une égalité à deux dimensions*.

Soit maintenant une surface-type, la sphère, le plan et analytiquement la pseudo-sphère. Toute figure tracée sur l'une de ces surfaces gardera dans toutes ses positions non seulement la même configuration interne, mais encore la

même configuration externe ; en d'autres termes, différentes positions de la figure, détachées de la surface, peuvent toujours être amenées à coïncider, il suffit pour cela de faire correspondre chacune à chacune deux lignes semblablement placées. On dit que la surface reste *égale à elle-même d'une égalité à trois dimensions*. —

A cause de ces propriétés les surfaces-types sont appelées *surfaces identiques à elles-mêmes* ; et les surfaces à courbure constante correspondant à l'une des surfaces-types sont dites *isométriques* à cette surface.

III. — LA COURBURE EN GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

Certains géomètres contemporains basent la géométrie plane sur la définition des surfaces identiques. Ils posent comme principe qu'il existe des surfaces telles qu'on peut y déplacer sans déformation une figure qui y est située, et étudient ces surfaces en tant qu'espaces à deux dimensions. La légitimité de leur point de départ, ils l'infèrent de ce qu'on peut en déduire une géométrie qui se poursuit aussi loin qu'on veut sans arriver à une contradiction *logique* ; pour nous, cette légitimité repose sur les considérations précédentes relatives à la courbure des surfaces euclidiennes.

A ce principe, s'ajoute la définition d'une ligne caractéristique de la surface identique. Dans le plan euclidien, la droite est une ligne telle que par deux points donnés il en passe toujours une et une seule. Par analogie les géomètres font l'hypothèse que sur les surfaces identiques

on peut placer une ligne entièrement déterminée par deux points quelconques. Mais comme ils savent par la géométrie euclidienne qu'il y a des exceptions (dans le cas de la sphère, si les deux points sont aux extrémités d'un même diamètre), ils posent cette définition qui ne peut s'expliquer sans recours implicite au système euclidien : on appelle ligne géodésique d'une surface identique une ligne située sur elle et telle que par deux points de la surface, il en passe toujours une et *généralement une seule*.

Considérons-nous les surfaces identiques en tant qu'espaces à deux dimensions, il n'est pas possible d'y adapter la théorie de la courbure que nous venons d'exposer, puisque cette théorie suppose des constructions en dehors de la surface ; on a tenté de lui substituer ce que Liouville a appelé la *courbure géodésique*. Quand une surface flexible mais inextensible se déforme, la courbure propre d'une ligne tracée sur cette surface varie d'une façon quelconque ; la courbure de la ligne plane, projection de cette ligne sur le plan tangent en l'un de ses points, conserve au contraire en ce point une valeur invariable. Remplaçons la tangente rectiligne par la géodésique tangente au point considéré, c'est-à-dire projetons sur la surface même au lieu de projeter sur le plan tangent, et nous pourrions définir la courbure d'une ligne sans construction en dehors de la surface.

Cette notion oblige à indiquer l'espace étudié, puisque la courbure géodésique est absolument relative à la surface sur laquelle on la considère. Pour obtenir une définition générale s'accordant avec la définition euclidienne et ne s'appuyant pas sur des constructions faites en dehors

de la surface, les néo-géomètres ont recours à un théorème de Gauss ainsi conçu : la courbure intégrale d'un triangle formé sur une surface continue quelconque par trois géodésiques est égale à la somme des angles de ce triangle diminuée de deux angles droits. Ils définissent donc la courbure d'une surface identique à elle-même en un point quelconque : la limite vers laquelle tend le quotient de l'excès angulaire d'un triangle géodésique divisé par la surface du triangle, quand les côtés décroissent indéfiniment. Selon que cette limite est positive, nulle ou négative, la surface considérée est à courbure positive, nulle ou négative.

Ainsi établie la notion de courbure n'est au fond qu'une relation analytique, qui ne peut être admise comme équivalente à la notion géométrique euclidienne, avant qu'il soit constaté qu'elle n'est pas plus étendue. Elle s'y ramène dans le cas de la géométrie ordinaire et même dans celui de la géométrie riemannienne, dès qu'on considère les figures riemanniennes comme surfaces euclidiennes. En géométrie lobatschewskienne, il en est tout autrement.

« Si certaines lignes, dit un philosophe non-euclidien (1), y ont des cercles osculateurs, il en est d'autres qui en sont dépourvues : telles sont toutes les droites de ces divers espaces. Si en effet nous prenons trois points sur l'une de ces lignes, les droites euclidiennes qui joignent les deux points extrêmes sont plus longues que la droite

(1) G. LÉCHALAS. La courbure et la distance en géométrie générale. *Revue de métaph. et de morale*, 4^e année, 1896, p. 198.

en géodésique considérée, et dès lors il est évident qu'aucun arc de cercle ne saurait les relier. Il suit de là que pour un plan de Lobatschewskij, par exemple, la mesure de la courbure par les rayons principaux est dépourvue de tout sens, et qu'il ne reste plus qu'une seule définition, celle qui résulte de la généralisation du théorème de Gauss : si ces plans ont une courbure et si elle est négative, cela signifie simplement que la somme des angles d'un triangle y est inférieure à deux droits. Non seulement il ne faut pas y ajouter l'indice d'une courbure à double sens ; mais, à proprement parler, on doit écarter la notion même de courbure, bien qu'ayant conservé cette expression. »

La courbure non-euclidienne est une propriété qui caractérise trois groupes de surfaces, qui sont les trois espèces de surfaces isométriques des géomètres euclidiens. Ce résultat ne saurait nous étonner : la distinction entre une surface identique à elle-même et ses isométriques n'étant pas possible en dehors de la troisième dimension, puisque sur toutes ces surfaces, à une géodésique correspond une géodésique, et que toutes les relations métriques sont les mêmes.

La géométrie ordinaire échappe à cette difficulté : tandis que la géodésique d'une surface identique est définie comme ligne de cette surface, et que, considérées dans l'espace euclidien à trois dimensions, les géodésiques d'une même surface peuvent avoir des formes différentes, la droite est conçue et définie indépendamment de la notion de plan, dans ce même espace à trois dimensions. Le plan euclidien se distingue de ses surfaces isométriques en ce que, par deux quelconques de ses points, on peut

toujours mener une droite entièrement située dans la surface, propriété qui ne s'applique ni au cône, ni au cylindre, ni à aucune autre surface développable.

Les théorèmes de la géométrie plane euclidienne s'appliquent aux surfaces isométriques au plan, quand on remplace les « lignes droites » par les « géodésiques » ; il faut excepter toutefois ceux qui nécessitent le retournement du plan, opération qui ne peut se faire que dans un espace à trois dimensions. Les géomètres non-euclidiens en concluent que les postulats d'Euclide sont écartés. L'affirmation du postulat des deux droites, par exemple, et la négation de ce postulat conduisent à deux classes de surfaces, « ce qui montre, dit M. Léchalas (1), que ni l'une ni l'autre n'est nécessaire quand on étudie l'ensemble de ces surfaces ». Soit, mais la difficulté nous semble seulement déplacée et non résolue ; il faudra toujours rétablir les postulats pour compléter l'étude de chacune de ces deux classes de surfaces.

Les géomètres non-euclidiens ont également constitué une géométrie à trois dimensions, directement et indépendamment de leur géométrie à deux dimensions, mais toutefois suivant un procédé identique, qui fait de la première la généralisation de la seconde. Ayant fait l'hypothèse qu'il existe des espaces à trois dimensions, le géomètre non-euclidien se limite pour la facilité de son étude à la considération des espaces identiques à eux-mêmes, c'est-à-dire des espaces tels qu'une figure quelconque qui y est située peut s'y déplacer sans déformation. Il suppose

(1) Étude sur l'espace et le temps, p. 28.

que dans un quelconque de ces espaces on peut toujours mener par deux points arbitrairement choisis une ligne, qu'il appelle la *droite* de l'espace considéré, et qui jouit de la propriété d'être seule de son espèce entre ces deux points; de même, il y a une surface identique à elle-même et *retournable*, qui joue dans chaque espace le rôle du plan dans l'espace euclidien.

Ces définitions des espaces identiques, de leurs droites et de leurs plans retournables, ils les placent au début de leur théorie sans s'expliquer sur la validité de l'extension qu'ils donnent ainsi à des propriétés de la droite et du plan euclidien, puisque, comme nous l'avons déjà dit, ce n'est qu'à la déduction seule qu'ils reconnaissent de pouvoir limiter leurs hypothèses, au cas où cette déduction aboutirait à une contradiction. Examinons ce que sont les espaces non-euclidiens, et tout d'abord, voyons si les géomètres sont fondés à accorder aux plans de ces divers espaces la propriété de retournabilité qui appartient au plan euclidien.

IV. — RETOURNABILITÉ GÉOMÉTRIQUE

La *retournabilité géométrique* est la propriété par laquelle une figure (ou une surface) invariable de forme peut être amenée par un déplacement convenable à coïncider avec la figure (ou la surface) symétrique par rapport à l'un de ses *plans normaux* (c'est-à-dire par rapport au plan mené par un point arbitrairement choisi d'une ligne quelconque de la figure (ou de la surface) perpendiculairement à la tangente à la ligne en ce point).

En *géométrie euclidienne*, la retournabilité est une propriété caractéristique de la ligne droite et des figures rectilinéaires dans le plan, du plan et des figures planes dans l'espace à trois dimensions.

Considérons une figure rectilinéaire : elle se compose de parties de droite, ou de points, ou de parties de droite et de points, séparés par des intervalles plus ou moins grands. Soit, par exemple, la figure AB, située sur la droite MN.

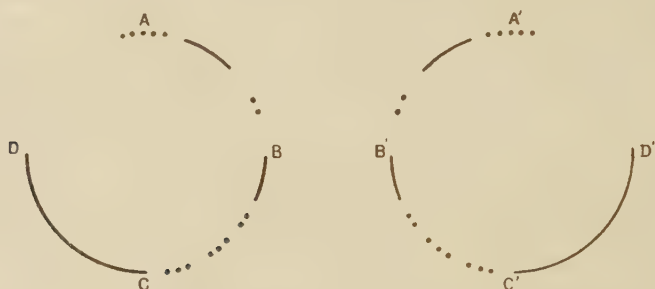


Toute figure symétrique de AB, construite d'après la définition de la retournabilité est identique à A'B', et celle-ci ne diffère pas de AB, si ce n'est que les éléments constitutifs sont placés dans l'ordre inverse, quand l'on parcourt la droite MN dans un sens déterminé, par exemple de gauche à droite. Si l'on ne considère que la ligne MN sur laquelle est tracée la figure AB, cette figure n'est pas retournable, car il est impossible de l'amener en coïncidence avec B'A'. On peut faire glisser AB jusqu'à ce que A vienne en B' et B en A' ; les figures se recouvrent mais ne coïncident pas ; les fragments de droite et les points qui composent AB ne recouvrent pas les fragments de droite et les points correspondants de A'B'. Permettons à la figure AB d'emprunter la seconde dimension, c'est-à-dire considérons-la dans un plan passant par la droite MN, il devient possible de lui faire exécuter dans ce plan une rotation de 180 degrés autour d'un point quelconque du

plan et, par une translation convenable, de l'amener en coïncidence avec $A'B'$.

Ce raisonnement s'applique aussi bien à la droite indéfinie MN qu'à toute figure tracée sur cette droite.

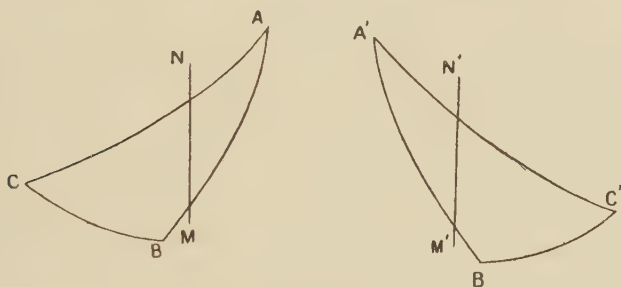
Aucune autre ligne du plan ne jouit de cette propriété. Soit, en effet, $ABCD$ une circonférence, la plus simple des courbes planes. Toute figure symétrique de $ABCD$ construite d'après la définition de la retournabilité se pré-



sentera comme $A'B'C'D'$, qui ne diffère pas de $ABCD$, si ce n'est par la disposition inverse des éléments quand on parcourt les deux circonférences dans un même sens à partir d'un point correspondant. Par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait pour la figure rectilinéaire, on constate qu'il est nécessaire pour faire coïncider $ABCD$ avec $A'B'C'D'$ de faire tourner la première figure de 180 degrés autour d'un axe convenablement choisi dans son plan ; mais alors cette figure a emprunté la troisième dimension et quitté le plan, tandis que la droite y demeurerait, parce qu'en réalité elle tournait autour d'un axe perpendiculaire au plan. Les mêmes considérations s'appliquent à toute autre figure plane.

Ce dernier exemple montre que dans l'espace à trois dimensions le plan est retournable par une demi-rotation autour d'une de ses droites. Après ce mouvement les figures tracées dans le plan deviennent symétriques de leur position première par rapport à l'axe de rotation, et par conséquent au plan perpendiculaire mené par cet axe.

Le plan jouit seul de cette propriété. Toute autre surface, fermée ou non, n'est pas retournable. Considérons, par exemple, un triangle curviligne ABC, découpé



dans une surface cylindrique. Toute figure symétrique, construite d'après la définition de la retournabilité, se présente comme $A'B'C'$ qui ne diffère de ABC que par la position inverse des éléments, par rapport au plan de symétrie. Il est toujours possible d'amener les deux figures en coïncidence suivant une génératrice de la surface ($MN.M'N'$), mais alors les figures ne se recouvrent pas. Fait-on, au contraire, coïncider les sommets correspondants, ces trois points seuls sont en contact. Dans un cas comme dans l'autre la courbure de la surface cylindrique s'oppose à l'adaptation complète des deux triangles.

Il en est de même de toute portion de surface non plane, et le raisonnement s'étend à ces surfaces elles-mêmes, puisqu'il est indépendant de la forme et des dimensions de la figure considérée.

Physiquement, si l'on suppose la surface réalisée par une toile infiniment mince, flexible et inextensible, la retournabilité est possible dans tous les cas : si la surface est ouverte, elle se retourne comme un gant ; si elle est fermée, on la divise en deux surfaces ouvertes qu'on retourne séparément et qu'on réunit ensuite suivant la ligne de séparation. En géométrie il en est tout autrement : le mathématicien faisant abstraction des qualités sensibles dont les corps étendus sont affectés dans la nature, ne considérant que la quantité intelligible, *les figures géométriques doivent rester invariables de forme pendant toute l'étude qu'on en fait*. Voilà pourquoi les surfaces autres que le plan, bien qu'on imagine et qu'on représente leur symétrique par rapport à un quelconque de leurs plans normaux, ne sont pas géométriquement retournables, puisque, ne fût-ce qu'un instant, elles devraient changer de forme extérieure, c'est-à-dire que les relations de troisième dimension qui existent entre les différents points ne pourraient demeurer constantes pendant le retournement.

Les considérations précédentes nous amènent à conclure que les figures de l'espace euclidien ne sont retournables que si l'on dispose d'une dimension en plus de celles que comporte réellement la figure. Cela explique qu'il soit impossible de superposer deux figures à trois dimensions simplement symétriques. Certains géomètres prétendent concevoir — sans pouvoir l'imaginer toutefois

— qu'avec une quatrième dimension la superposition deviendrait possible.

Cette analogie, les géomètres non-euclidiens doivent l'employer déjà pour leur troisième dimension.

Remarquons encore que de toutes les surfaces réglées, qui sont les surfaces engendrées par le déplacement d'une droite mobile, le plan est la seule sur laquelle sa géodésique, la droite, puisse se retourner. Sur toutes les autres, la génératrice rectiligne ne pourrait être retournée sans une déformation transitoire que ne permet pas la géométrie. Cette propriété très remarquable s'étend aux deux autres surfaces identiques à elles-mêmes d'une égalité à trois dimensions et les distingue de leurs surfaces isométriques : le grand cercle sur la sphère ou la géodésique sur la pseudo-sphère par une demi-rotation autour d'un axe situé dans son plan et passant par le centre de symétrie engendre sa figure retournée, et cela sans quitter la surface. Quand on considère les surfaces comme espaces à deux dimensions la retournabilité est donc une propriété caractéristique des géodésiques sur les surfaces identiques. On voit déjà quel parti les géomètres non-euclidiens vont tirer de cette remarque.

Dans le plan riemannien, la droite (analogue au grand cercle d'une sphère euclidienne) peut tourner autour d'un de ses points sans sortir du plan, comme la droite euclidienne tourne autour d'un de ses points dans le plan euclidien. Toutefois, tandis qu'en géométrie euclidienne le grand cercle a deux dimensions et se retourne dans la troisième, en géométrie riemannienne la droite (R) n'en a qu'une seule et se meut dans la seconde.

Une difficulté surgit : par tout point d'un grand cercle euclidien on peut faire passer deux sphères orthogonales à ce grand cercle ; il y a donc en géométrie riemannienne deux plans perpendiculaires à une droite (R) quelconque en chacun de ses points, et la définition que nous avons donnée de la retournabilité ne saurait s'appliquer sans modification. Mais n'insistons pas sur cette difficulté et voyons comment les géomètres riemanniens établissent que leur plan est retournable.

Il faut ici faire appel à l'analogie précédemment établie. La sphère euclidienne, nous l'avons vu, n'est pas retournable ; mais nous imaginons bien la figure retournée d'une portion de sphère et certains prétendent concevoir qu'avec une quatrième dimension on pourrait retourner la sphère entière. Ainsi fait le géomètre riemannien. Dans l'espace à trois dimensions de même courbure que son plan, il prétend retourner ce plan comme nous retournons le nôtre dans l'espace euclidien. Ne cherchons pas à *voir* comment cela se fait ; impossible de l'imaginer. De même pour le géomètre lobatschewskien, la droite (L) (géodésique de la pseudo-sphère) et le plan (L) (pseudo-sphère euclidienne) jouissent de la propriété d'être retournables et sont les seuls à en jouir.

Comme en géométrie euclidienne, les surfaces applicables sur le plan riemannien ou sur le plan lobatschewskien peuvent se retourner par une déformation transitive ne changeant pas la construction interne de la surface.

Qu'en introduisant dans leurs théories cette hypothèse de la retournabilité des surfaces identiques les géomètres non-euclidiens ne s'exposent pas à parvenir dans

la suite de leurs déductions à une contradiction, cela ressort de la distinction qui existe entre la retournabilité physique et la retournabilité géométrique. Celle-ci exige que la figure qui se retourne reste invariable de forme pendant toute la durée du retournement ; celle-là demande seulement que, l'opération terminée, les relations mutuelles de distance entre deux points quelconques redeviennent les mêmes. Or, nous pouvons toujours concevoir et réaliser une figure qui soit symétrique à une figure donnée, et comme tous les problèmes de géométrie où intervient la retournabilité ne considèrent pas la figure pendant le retournement mais dans sa position primitive et dans sa position retournée, la déduction indéfinie sans contradiction n'est pas un critérium suffisant pour établir le bien fondé de l'hypothèse de la retournabilité des surfaces identiques.

Des définitions primordiales relatives aux espaces identiques, il résulte que ces espaces sont aux surfaces identiques ce que ces surfaces sont à leurs géodésiques. A chaque surface identique, que sa courbure soit positive, nulle ou négative, répond un espace identique ayant cette surface comme surface géodésique, c'est-à-dire que les lignes géodésiques de la surface sont en même temps des géodésiques de l'espace. Dans chaque espace la surface géodésique est retournable et y joue le même rôle que le plan dans l'espace euclidien.

Il semble qu'on ne puisse pas comparer des figures tracées dans des espaces différents. En effet, « la ligne droite est définie dans l'espace à trois dimensions : comme,

d'une part, il y a impossibilité de faire coïncider deux droites appartenant à des plans de paramètres différents, et comme, d'autre part, il n'existe qu'une droite passant par deux mêmes points, en vertu de la définition de la droite, on est obligé de reconnaître que la géométrie générale force à admettre des espaces à trois dimensions distincts dans lesquels ne peuvent entrer les figures appartenant aux autres (1) ». Pour sortir de cette difficulté, les géomètres non-euclidiens sont obligés de recourir à l'analyse infinitésimale. Les suivre sur ce terrain nous mènerait trop loin.

Enfin, pour terminer ces considérations sur les espaces identiques, nous devons nous demander comment ils se comportent entre eux. De la dernière citation que nous avons empruntée à M. Léchalas, il semble ressortir que les divers espaces ne sauraient avoir quoi que ce soit de commun, et que logiquement on doit les considérer comme indépendants. Cependant cet auteur admet ailleurs (2) que ces espaces peuvent se couper deux à deux et que l'on doit en concevoir une infinité situés dans un même espace à quatre dimensions. « Il va de soi, ajoute-t-il, que si nous avons parlé d'un espace à quatre dimensions, cela ne signifie pas qu'il n'y en ait qu'un ; comme pour les espaces à trois dimensions, il y aurait lieu de définir par son paramètre chaque espace à quatre dimensions identique à lui-même. »

(1) G. LÉCHALAS. La géométrie générale. *Critique philosophique*, septembre 1889, p. 224.

(2) Étude sur l'espace et le temps, p. 40.

Tous les partisans de la nouvelle géométrie ne sont pas aussi logiques que M. Léchalas. Les uns se réservent ; d'autres se refusent à admettre toute relation entre les théories non-euclidiennes et la géométrie à trois dimensions. Pour nous, il convient de suspendre notre jugement jusqu'au moment où nous étudierons les théories de l'espace à trois dimensions.

Les considérations précédentes sur la géométrie non-euclidienne montrent que dans sa forme la plus récente elle est constituée comme suite indéfinie de déductions dont l'enchaînement logique doit prouver le bien-fondé de la définition qui sert de base au système.

Il n'est pas d'euclidien, si opposé soit-il aux nouvelles théories, qui puisse refuser d'admettre que la déduction s'y poursuit indéfiniment sans pouvoir arriver jamais à une contradiction. En effet, M. Calinon reprenant et complétant la théorie du dictionnaire de M. Poincaré, a montré qu'on peut constituer entre les figures euclidiennes et les figures non-euclidiennes une correspondance telle que dans l'un et l'autre systèmes ces figures soient liées aux mêmes équations fondamentales : la géométrie euclidienne se porte garante de la rigueur des déductions de la géométrie nouvelle.

Ceci admis, s'en suit-il, comme le prétendent les adeptes des théories modernes, que la définition qui sert de base à leur système est prouvée ? En d'autres termes, cette déduction qui peut se poursuivre indéfiniment sans contradiction est-elle un critérium suffisant de la valeur de la théorie ? Nous ne le croyons pas. Il nous semble

absolument nécessaire de connaître la base rationnelle sur laquelle cet édifice est construit, de savoir à quelles intuitions correspondent les définitions primordiales de cette géométrie ; si ces définitions sont adéquates, convenant à l'objet que l'on veut définir, à tout cet objet et à lui seul ; enfin si ces définitions, applicables à des objets d'intuition, n'ont pas été arbitrairement étendues et appliquées à d'autres objets.

Ce n'est pas aux mathématiques qu'il appartient de répondre.

CHAPITRE III

L'ESPACE GÉOMÉTRIQUE

I. — LE CONCEPT D'ESPACE GÉOMÉTRIQUE

La géométrie étant la science des déterminations possibles de ce que nous appelons l'espace, il est absolument nécessaire pour pouvoir juger de la portée philosophique des différents systèmes de savoir ce qu'est l'espace et par conséquent comment on peut le déterminer. Les philosophes sont partagés sur l'origine de la notion d'espace : les uns y voient l'œuvre de la pensée pure, exerçant son activité indépendamment du monde extérieur ; pour les autres, au contraire, l'esprit dégage des objets qui impressionnent les sens, les données de points, lignes, surfaces et volumes idéaux.

Les nouvelles géométries semblent appuyer la première théorie, puisqu'elles sont fondées sur le contraire d'un postulat de la géométrie ordinaire. Mais, — nous nous efforcerons de le prouver, — elles peuvent être considérées comme des cas particuliers du système euclidien, et si les apparences sont trompeuses, c'est que nous sommes dans l'impossibilité de donner une véritable définition de la ligne droite, ou plutôt, c'est que cette ligne n'est intro-

duite en géométrie plane que comme ligne définie par deux de ses points, c'est-à-dire par une propriété qui convient également aux géodésiques des surfaces à courbure constante, quand on fait de la géométrie à deux dimensions.

Il en est de même des spéculations mathématiques appelées géométrie à n dimensions. Cette géométrie que nous étudierons au chapitre V, n'est à proprement parler qu'une extension de l'algèbre, non susceptible d'interprétation géométrique. Les termes d'hyperespace, d'hyper-solide... qu'elle emploie n'ont été créés que pour ne pas compliquer un langage rendu si simple dans le cas de 1, 2 ou 3 variables, par l'introduction de la représentation géométrique.

Pouvons-nous admettre la première théorie ? L'espace est-il une sorte de cadre antérieur à toute connaissance des objets extérieurs et indépendant de ces objets ? On peut combiner des grandeurs spatiales : lignes, surfaces et volumes, bien au delà des formes observées dans la nature, et en cela l'esprit n'est pas limité ; mais ces grandeurs qu'il combine, ne sont-elles pas des déterminations de ce que nous appelons l'espace ? Et quand nous essayons de nous représenter cet espace, c'est toujours avec un ensemble de qualités sensibles que l'imagination le suscite devant l'esprit : visuellement, il apparaît toujours uni à la représentation de quelque sensation de couleur, aussi faible, aussi atténuée, qu'elle peut l'être ; tactilement, il entraîne avec lui la représentation de quelque sensation de pression et même de forme. Ces qualités sensibles ne

font pas partie de l'idée pure de l'espace, mais si nous les trouvons dès que nous voulons nous représenter mentalement la notion, c'est que cette notion vient d'un complexe où elle se trouvait unie avec elles. De plus l'idée de pluralité qui se rencontre dans toute détermination de l'espace, ne saurait venir du moi pensant. Réfléchissant toujours sur lui-même, l'esprit n'arriverait jamais à cette idée de pluralité, qui vient nécessairement d'états psychologiques différents. Ces divers états produits par des objets distincts nous donnent simultanément l'idée de pluralité et celle d'unité qui lui est opposée.

L'espace n'est donc pas une forme subjective, c'est une donnée du monde extérieur. Cette donnée est-elle le résultat de l'expérience brute ? ou bien les diverses notions spatiales sont-elles transformées par l'esprit avant de devenir l'objet de la science mathématique ?

Les points, les lignes, les cercles que chacun a dans l'esprit, selon Stuart Mill, sont de simples copies des points, des lignes et des cercles que l'on connaît par l'expérience. Les définitions géométriques ne sont que nos premières et nos plus évidentes généralisations relatives aux objets naturels.

Ainsi donc pour Stuart Mill la notion géométrique résulte d'une généralisation de caractères spatiaux reconnus communs à plusieurs objets. Si je considère un être quelconque dans la nature, je distingue dans cet être de nombreuses propriétés différentes, propriétés géométriques, physiques, chimiques... dont l'ensemble ne peut être affirmé d'aucun autre être ; mais chacune de ces por-

priétés, isolée du groupement où je l'ai observée, indépendamment de la combinaison dans laquelle je l'ai constatée, peut être affirmée d'un nombre indéfini d'êtres semblables, quelles que soient les circonstances de lieu et de temps. Particulière, lorsque je l'appliquais à un seul individu, la notion de cette propriété devient générale et augmente indéfiniment en extension, sans changer toutefois de compréhension.

La figure est l'une de ces propriétés que l'on rencontre dans les corps qui nous entourent. Abstraite de l'un d'eux, elle peut s'affirmer d'un nombre illimité d'autres êtres de même espèce.

L'expérience nous la montre tout autre que dans la notion géométrique, qui lui correspond. Nous observons des tiges, des fils, que nous appelons droits, des corps sphériques, cylindriques, cubiques, dont les sections sont circulaires, elliptiques ou polygonales ; nous les comparons et constatons que des corps auxquels nous avons attribué une même propriété diffèrent sensiblement. Deux tiges rigides me semblaient droites, et un simple verre grossissant me montre entre elles des différences profondes ; telle ligne, qui, à l'œil nu, paraît fort régulière, devient au microscope une série de lignes brisées et de lignes courbes. Il faut donc convenir avec Stuart Mill qu'il n'y a pas de choses réelles exactement conformes aux définitions géométriques ; qu'il n'y a pas de points sans étendue, pas de lignes sans largeur, ni parfaitement droites, pas de cercles à rayons exactement égaux ni de carrés à angles parfaitement droits. Mais alors, quel est l'objet de la géométrie ? Sont-ce les formes pures ? La

généralisation ne peut expliquer comment nous en avons la notion. Sont-ce, au contraire, comme semble le dire le philosophe anglais, les formes des objets matériels ? La généralisation est inutile, puisqu'il n'y a pas d'objets semblables.

Nous ne croyons pas toutefois avec le philosophe anglais que l'exactitude que nous attribuons aux premiers principes de la géométrie soit illusoire, car ils correspondent à des faits réels ; nous ne pouvons pas non plus admettre avec lui l'opinion de Dugald-Steward qui présente les fondements de cette science comme des hypothèses d'où l'on tire un ensemble de conclusions absolument rigoureuses, dès qu'on admet l'hypothèse. Bien meilleure nous paraît la théorie des philosophes qui ont admis, à la suite d'Aristote que l'âme possède une puissance spéciale, l'intellect agent, par laquelle, faisant abstraction des notes individuanes, elle extrait des objets matériels ce qu'il y a d'intelligible. Quand je me représente deux surfaces se coupant suivant une ligne, j'abstrais de ma pensée toute matière déterminée, ces surfaces ne sont ni en bois, ni en métal, ni en pierre ; autrement je devrais faire une géométrie du bois, une géométrie des métaux, une géométrie de la pierre, car les figures réalisées dans la nature diffèrent profondément suivant la matière qui les compose. Pendant toutes les opérations géométriques, le mathématicien sait fort bien qu'il ne raisonne pas sur les objets matériels même ou sur leurs images : ce n'est pas du cercle grossièrement tracé à la craie sur un tableau noir qu'il prétend démontrer que

tous les rayons sont égaux ; c'est sur la figure idéale, abstraite par l'intellect agent des données des sens, qu'il base sa démonstration. Il sait bien que, pour correspondre à la réalité, les résultats qu'il obtient devront être modifiés par les résultats d'autres sciences ; mais il sait aussi que cela tient à l'imperfection des formes physiques, réalisées dans des corps soumis aux lois thermiques, magnétiques ou chimiques.

Des corps matériels qui nous entourent nous sommes parvenus par l'abstraction à établir les notions de point sans extensions, ligne sans largeur, surface sans épaisseur, volume étendu en trois dimensions. Retenons ces trois dimensions, considérons-les indépendamment du corps étendu ; nous avons le concept d'espace réel ; ce n'est pas l'extension même du corps, c'est le contenu du lieu du corps, rempli par ce corps. Élevons-nous encore plus haut, rejetons le dernier lien qui unit la notion d'espace à la matière sensible déterminée, l'esprit se trouve en présence d'une pure possibilité, l'espace idéal, l'espace géométrique. Ce n'est pas cette immensité dans laquelle se perd l'imagination impuissante à se représenter l'idée toute négative qui se trouve dans cette abstraction, c'est seulement la possibilité indéfinie de contenir des corps.

D'où vient que l'esprit puisse ainsi abstraire l'espace de la matière déterminée ? C'est, si nous ne nous trompons, de ce que l'étendue dont nous tirons la notion d'espace est le premier accident des corps matériels, qu'il est indépendant de tous les autres, et par conséquent peut être considéré par l'esprit en dehors d'eux. Dans le concept de chien, par exemple, est inclu nécessairement celui d'ani-

mal, dont il dépend ; dans celui d'étendue, il y a la notion de matière sensible, mais non celle de matière sensible déterminée.

II. — PROPRIÉTÉS DE L'ESPACE GÉOMÉTRIQUE

Cet espace possible, le mathématicien pourra le déterminer à volonté, y plaçant des figures aussi variées que son imagination pourra les inventer, sous la seule réserve du principe de non-contradiction. Il est donc *homogène*, c'est-à-dire qu'il peut être indéfiniment divisé en parties semblables, ce qui suppose en puissance autant de parties dans le moins que dans le plus. On s'est scandalisé d'un tel fait et on a cru trouver là quelque contradiction : « Une sphère, si petite qu'elle soit, dit M. Delbœuf (1), est l'image exacte d'une autre sphère, si grande qu'on l'imagine. Il n'y a pas un point dans celle-ci qui n'ait son représentant spécial dans celle-là ; et cependant elle contient plus de points que celle-là. Sur son rayon on pourra placer deux fois, trois fois, cent fois, un million de fois le rayon de la petite sphère, il contiendra donc deux fois, trois fois, cent fois, un million de fois autant de points que celui-ci, — ou si l'on n'aime pas le mot point, qu'on accepte l'expression plus vague de partie ou de terme — et pourtant, en vertu du postulat, il y a autant de parties, autant de termes dans le petit que dans le grand. C'est là

(1) L'ancienne et les nouvelles géométries. *Revue philosophique*, t. XXXVI, 1893, p. 463.

une contradiction manifeste qui fait des espaces euclidiens un espace plus imaginaire que celui qu'on voit derrière un miroir. » M. Delbœuf a raison s'il considère des points déjà marqués sur le rayon de la petite sphère : que je le place deux fois, trois fois, cent fois, un million de fois sur le rayon de la grande sphère, j'aurai sur ce rayon un nombre proportionnel de points. Mais est-ce là ce qu'on entend par l'homogénéité de l'espace ? Non pas ; quand je dis qu'une petite sphère est l'image exacte d'une sphère plus grande, je prétends simplement qu'à toute figure dessinée sur celle-ci, je puis faire correspondre sur celle-là une figure semblable ayant les mêmes propriétés ; que pour tout point que vous marquerez sur l'une d'elles, je marquerai sur l'autre un point placé dans les mêmes conditions.

De cette homogénéité de l'espace résulte que la démonstration géométrique est indépendante de la grandeur de la figure, en d'autres termes qu'il y a des figures semblables c'est-à-dire des figures ayant les mêmes propriétés avec des dimensions différentes.

Les nouvelles géométries n'admettent pas la similitude. Dans un plan riemannien, si je veux tracer un triangle semblable à un triangle donné, les deux figures auront nécessairement leurs côtés égaux, chacun à chacun. Ces systèmes déterminent donc l'espace d'une façon particulière, en restreignant sa propriété fondamentale : elles sont par conséquent moins générales que la géométrie euclidienne qui admet cette propriété dans toute son amplitude.

L'homogénéité de l'espace géométrique a donné lieu

au problème des mondes semblables. M. Delbœuf suppose qu'un homme, auquel il donne le nom de Mégamicros, se trouve transporté dans un monde dont toutes les dimensions linéaires ne sont que la moitié des dimensions correspondantes de notre univers. Déjà Laplace avait remarqué qu'en astronomie aucun des mouvements des astres ne serait troublé s'il se produisait une telle réduction. M. Delbœuf étend à l'être humain tout entier la réduction proportionnelle, ou plutôt il fait une distinction, ne pouvant concevoir que l'intelligence, la mémoire, la raison de Mégamicros aient été transformées dans la même proportion que la masse et le volume de son cerveau et il en conclut que l'espace réel ne correspond pas à l'espace géométrique, que les propriétés de celui-ci ne sont pas les propriétés de celui-là.

C'est, ce nous semble, une fausse interprétation de la question. Nous parlons d'une propriété de l'espace et nous cherchons ce qui résulterait d'une réduction de cet espace. Nous sommes dans le domaine de l'abstraction mathématique, et non dans le domaine des faits matériels. Les relations observées dans les figures subsistent toutes, quand je réduis ces figures suivant une loi de proportionnalité, parce que ces relations sont intimement liées les unes aux autres et ne sont que des rapports de distances. Mais, en passant à l'ordre des faits, on introduit dans la question toute autre chose que de la géométrie ; la figure devient intimement liée à une matière déterminée et ne peut subsister dès que cette matière change de détermination soit dans ses propriétés physiques, soit dans ses propriétés chimiques.

On ne se rend pas bien compte de l'abstraction quand on se demande, par exemple, si l'espace géométrique comporte une physique, une chimie, une biologie. La matière déterminée que supposent les sciences naturelles n'est pas l'objet de la géométrie pure, c'est celui de la géométrie appliquée. C'est à cette dernière science qu'il appartient d'adapter les résultats purement idéaux de la géométrie aux objets matériels, en tenant compte des lois physiques et chimiques qui s'opposent à la stabilité des figures.

Comme corollaires de l'homogénéité de l'espace, nous devons noter son isogénéité, son invariabilité, son identité. L'espace géométrique est isogène, étant indéfiniment divisible en parties semblables ; il l'est nécessairement et à plus forte raison en parties égales.

L'espace géométrique est invariable ; la figure que nous appelons triangle est la même qu'elle était au temps d'Euclide ou d'Aristote ; elle est la même pour l'Européen que pour l'Américain ; parce qu'elle est une pure notion, indépendante des triangles qui peuvent être réalisés dans la nature.

L'espace géométrique est identique à lui-même. Dans la conception que nous nous faisons de cet espace, les figures que nous y déplaçons ne font que changer de lieu, et tous les lieux possibles sont identiques. Il n'en est point ainsi des figures des corps matériels ; quand le corps change de lieu, ses molécules soumises aux lois physiques subissent des pressions variables qui le distendent ou le resserrent et changent sa conformation. L'étude de ces

changements appartient à la physique, celle des formes pures fait l'objet de la géométrie.

Un triangle, en tant que triangle, est le même au pôle et à l'équateur, parce que ni l'équateur ni le pôle n'entrent dans sa définition ; mais un triangle réalisé dans un corps physique varie de grandeur quand on le transporte d'un lieu à un autre parce que c'est un *triangle physique*, par conséquent soumis à des conditions de température, d'attraction... qui varient suivant les lieux ; ce n'est pas comme triangle, mais parce qu'elle est réalisée dans le monde physique, que sa figure peut changer. Il n'y a donc pas lieu de faire un axiome de la possibilité du monument d'une figure invariable comme le voudrait M. Poincaré (1).

Enfin, de ce que l'espace géométrique est un être de raison, il résulte qu'on peut le déterminer simultanément de plusieurs façons, que les corps idéaux que nous y plaçons n'offrent aucune résistance et se compénètrent. Je puis concevoir une sphère, un cône, un cylindre, occupant une même portion de l'espace. Je puis supprimer telle partie qu'il me plaira, ne considérer par exemple que l'espace extérieur à la sphère, diviser de nouveau cet espace, y pratiquer des solutions de continuité. Tout cela m'est permis, pourvu que je reste dans l'ordre idéal de mon abstraction ; quand je voudrai passer à l'ordre réel, il me faudra tenir compte des autres sciences, non pas

(1) POINCARÉ. Les géométries non-euclidiennes. *Revue gén. des Sc.* 15 décembre 1891. Cf. A. FOUILLEE. Le mouvement positiviste et la conception sociologique du monde, p. 38-39.

pour contrôler mes recherches, mais seulement pour établir ce qu'elles ont de compatible avec les propriétés que j'avais négligées.

III. — L'ESPACE NON-EUCLIDIEN

Quelle est la position des néo-géomètres vis-à-vis de l'espace idéal, tel que nous le concevons? Les solides idéaux que considère notre géométrie peuvent toujours être coupés par des plans euclidiens absolument réguliers. Il n'en est pas ainsi des corps physiques, et même dans la plupart des cas, en fendant un morceau de bois par exemple, ou en divisant un minéral, on obtient une surface plus ou moins régulière qui n'est pas un plan. Même dans les cristaux, qui présentent plus de régularité que tous les autres corps, il arrive souvent que les faces ne sont pas planes. Dans certaines espèces, le diamant et le gypse, par exemple, le fait de la courbure des faces est à peu près constant. Entre deux points d'une telle surface, il sera généralement impossible de tracer une droite physique, à cause de l'impénétrabilité du corps, bien que par la pensée il soit toujours permis d'imaginer la droite géométrique reliant ces deux points. Cependant il y a, en général, sur la surface, une ligne de plus courte distance entre deux points quelconques, ligne qu'on est convenu d'appeler géodésique de la surface.

Les néo-géomètres imaginent des espaces où un fil tendu prendrait nécessairement la forme qu'il prend en réalité si on veut le tendre sur une sphère matérielle

(géométrie riemannienne) ou suivant certaines lignes d'une surface pseudo-sphérique (géométrie lobatschewskienne) absolument comme dans notre espace physique, quand on tend un fil pesant entre deux points, il s'incurve sous l'action de la pesanteur et donne lieu à la figure géométrique que nous appelons chaînette. Ils pourraient tout aussi bien considérer des courbes dont la génération serait plus compliquée, par exemple celle d'un rayon lumineux traversant une atmosphère de densité variable. Quand un rayon lumineux se propageant en ligne droite dans un milieu homogène vient à rencontrer un autre milieu également homogène mais de densité différente, il suit encore le plus court chemin relatif, qui dans ce cas est une ligne droite euclidienne, dont la direction est différente de celle qu'il suivait primitivement. Si au second milieu succède un troisième milieu de densité différente, également homogène, le rayon lumineux prendra une troisième direction. Qu'au lieu de milieux homogènes successifs, il traverse un espace dont la densité varie sans cesse d'une façon régulière, le rayon lumineux suivra une courbe régulière qui sera le plus court chemin. Un autre exemple d'un plus court chemin qui n'est pas une droite, c'est la courbe du chien. On sait en quoi consiste cette courbe : le maître du chien se promène d'un pas régulier le long d'une route droite ; le chien qui est dans la campagne veut rejoindre son maître ; il se met à courir, se dirigeant toujours vers lui, et décrit ainsi une courbe qui est le plus court chemin.

Il est aisé de comprendre que si nous transportons la courbe décrite par le rayon lumineux dans un espace de

densité différente, elle ne correspondra plus au plus court chemin. Ainsi en est-il dans les géométries non-euclidiennes. Une droite riemannienne de l'espace à courbure A transporté dans l'espace à courbure B y sera une courbe plane, et non plus une ligne droite; nous pouvons nous rendre compte de cette différence en géométrie euclidienne : cette droite riemannienne est un grand cercle d'une certaine sphère euclidienne; la transporter dans un autre espace riemannien, c'est pour nous la transporter sur une autre sphère de rayon différent, où elle sera un petit cercle, si le rayon est plus grand que celui de la première sphère; si ce rayon est plus petit, nous ne pouvons la rapporter à notre sphère. Dans l'espace riemannien, tel que le conçoivent les néo-géomètres, peut-être peut-elle trouver place, grâce à la troisième dimension, nous n'oserions toutefois l'affirmer, car ne concevant pas bien ce qu'est un espace riemannien à trois dimensions, et sachant d'autre part qu'il est limité, nous pouvons nous exposer à l'erreur de celui qui prétendrait placer une circonférence sur une sphère de rayon plus petit.

On pourrait croire que les géométries non-euclidiennes, puisant dans le monde sensible leurs données premières, ont même raison d'exister que le système euclidien. Mais ces géométries ne s'élèvent pas à une abstraction aussi pure, aussi complète que celle de la géométrie ordinaire. Elles mêlent dans leurs données primitives à la notion de figure une notion physique qui détermine la première et lui enlève de sa généralité; car l'espace tel que nous le concevons est un concept d'où l'on a retiré toutes les

figures et où l'esprit les replace. Il n'y a donc pas en lui de structure interne ; pas de formes, mais la simple possibilité d'être déterminé de toutes les façons possibles. Ces déterminations, les figures peuvent être planes, sphériques, pseudo-sphériques, elliptiques, hyperboliques, paraboliques ; on peut les considérer par groupes possédant des propriétés communes, c'est ce que font les néo-géomètres ; mais alors ce n'est pas la géométrie générale, c'est tout au contraire des géométries particulières qu'on étudie.

CHAPITRE IV

DÉFINITIONS DE LA LIGNE DROITE

I. — LA DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE

Quand nous sommes parvenus aux notions de volume, surface, ligne, ... c'est par la définition que nous pouvons manifester notre conception des figures qui correspondent à ces notions.

Tout concept géométrique peut renfermer trois éléments : la grandeur, la situation et la forme d'une figure.

La *grandeur* est la quantité d'espace géométrique compris dans la figure. C'est la matière indispensable sans laquelle il ne saurait y avoir de figure, et cependant elle n'entrera pas explicitement dans la définition, parce que, si les figures ne peuvent être réalisées que dans la matière sensible, on peut les concevoir indépendamment de telle ou telle matière déterminée. D'ailleurs, si une figure géométrique euclidienne peut augmenter ou diminuer de grandeur, sans que varie la notion à laquelle elle correspond, il n'est pas moins vrai que plusieurs espaces de même grandeur peuvent répondre à des définitions différentes : les triangles semblables, qui ne diffèrent pas de forme, mais seulement de surface, ont une même défi-

nition, celle du triangle ; la sphère, le cube et le cône de même volume, chacun une définition spéciale.

La *situation* est le rapport de position qui existe entre la figure considérée et une ou plusieurs autres figures antérieurement connues. Pour déterminer la situation, il faut connaître la figure ; ce n'est donc pas un élément de la définition.

Reste la *forme* : la définition devra l'exprimer. Or, la forme résulte d'une certaine disposition, les uns par rapport aux autres, des points, lignes ou surfaces qui limitent la figure. La définition géométrique parfaite devra exprimer cette disposition, ou, ce qui revient au même, donner les moyens de construire la figure et de la distinguer des autres figures. Ce sera une définition *per generationem*, ou, selon l'expression bien connue de M. Delbœuf, une définition *génétique*.

Ainsi donnée, la définition indiquera l'essence de la figure, comme le montre l'exemple suivant : « Quand on me dit : « la circonférence est la courbe engendrée par « un point qui se meut dans le plan en restant toujours à « la même distance d'un point fixe », immédiatement je vois ce point mobile et ce point fixe ; je suis le premier dans son mouvement, et je vois la courbe qu'il trace ; j'ai pris arbitrairement tel ou tel rayon, car les dimensions de la figure ne font rien à l'affaire, et l'essentiel était d'assister à la génération de la courbe, de m'assurer que de la règle de construction posée résulte la figure définie... Il faut qu'une certaine quantité soit comprise dans la figure puisque tout schème est une image, et que ce qui n'a pas de quantité ne saurait être imaginé ; mais l'objet propre

du schème est la loi de construction qui peut être réalisée indifféremment dans tous les points de l'espace (1). »

Remarquons qu'il n'est pas possible de définir ainsi toutes les figures ; la définition génétique suppose des constructions, et toute construction nécessite la connaissance préalable d'une figure antérieure à celle que l'on construit ; aussi ne peut-elle s'appliquer aux notions les plus simples de la géométrie. Il faudra donc définir les premières figures par une propriété caractéristique, c'est-à-dire par une propriété convenant à la figure et à elle seule.

La valeur intrinsèque de ces deux espèces de définitions est bien différente.

La définition génétique donne l'essence de la figure, elle fait connaître ce qui fait que cette figure est ce qu'elle est, puisqu'elle en indique la forme, et que c'est par la forme que les diverses espèces de figures se distinguent. Quand on définit le triangle rectiligne la figure formée par trois droites qui se coupent deux à deux, on donne une définition génétique, qui permet de construire le triangle et de le distinguer des autres figures planes ; c'est aussi une définition essentielle, la nature du triangle étant d'être composé de trois droites qui se coupent. Le définition, au contraire, un polygone dont la somme des angles est égale à deux angles droits, on indique une de ses pro-

(1) LIARD. Des définitions géométriques et des définitions empiriques, p. 62-63.

priétés caractéristiques, et pourtant l'esprit n'est pas satisfait ; deux questions se posent : peut-il exister un tel polygone, et si ce polygone existe, combien a-t-il de côtés ? Il est impossible de répondre en partant de la définition donnée. On ne parviendra pas à y rattacher logiquement les propriétés du triangle, tandis que l'on doit arriver à voir les relations qui unissent d'une façon logique et nécessaire toutes les propriétés à la définition essentielle et génétique. Aussi n'y a-t-il pas lieu de s'étonner si aux premières définitions de la géométrie — définitions qui ne peuvent être génétiques, — on ne peut relier logiquement qu'une partie des propriétés aperçues intuitivement dans les figures définies. Il restera un résidu, qui devra être présenté sous forme de postulats.

La définition génétique, nous l'avons vu, met à la disposition du géomètre les éléments nécessaires et suffisants pour construire la figure définie. Telle est, en géométrie plane, cette définition de la circonférence : une courbe fermée dont tous les points sont équidistants d'un point appelé centre. Telle est encore la définition des polygones semblables, qui sont des polygones dont les angles sont égaux et les côtés proportionnels. Étant donné un polygone quelconque $ABCD\dots$ et un segment de droite $A'B'$ qui est dans un certain rapport avec le côté AB du polygone, il est toujours possible de construire, en s'appuyant sur cette définition, une figure semblable au polygone donné ; il suffit de former au point B' un angle égal à l'angle B ; de porter sur le côté de cet angle une longueur $B' C'$ qui soit avec BC dans le rapport de

proportionnalité qui unit $A'B'$ à AB ; de former en C' dans le plan $A' B' C'$ un angle égal à l'angle $C...$, etc...

Cette dernière définition génétique, irréprochable dans le cas des polygones à 4, 5, ou 10 côtés, peut être attaquée quand on l'applique aux triangles. Si je dis que les triangles semblables sont des triangles dont les angles sont égaux et les côtés proportionnels, j'énonce plus de conditions qu'il n'est besoin pour déterminer les figures ; les trois côtés du triangle étant donnés, on peut le construire, et l'on n'est pas libre de choisir les angles. Une telle définition, qui est *surabondante*, peut être conservée dans l'exposition de la géométrie, à cause de la définition de plus grande extension dont elle est un cas particulier, mais elle suppose un théorème pour réduire le nombre des conditions ; et, en effet, tous les manuels qui l'emploient établissent ensuite que l'égalité des angles et la proportionnalité des côtés sont corrélatives.

La définition par une propriété caractéristique peut également tomber dans le défaut de la surabondance. On définit parfois le plan : une surface telle que toute droite qui a deux de ses points dans la surface y est contenue tout entière. L'intuition nous révèle qu'une telle surface est possible ; la définition nous donne des conditions surabondantes qui n'ont pu être reliées par aucun théorème.

Qu'elle nous donne ou non les moyens de construire la figure, qu'elle soit génétique ou caractéristique, la définition géométrique doit toujours nous permettre de distinguer la figure définie. La définition de la ligne droite

que, depuis Legendre, on trouve dans la plupart des auteurs classiques, pêche contre cette règle. Que cette ligne soit la plus courte entre deux points donnés, c'est certainement l'une de ses propriétés caractéristiques ; mais pour qui n'en connaîtrait pas d'autres, il serait impossible de savoir si, parmi plusieurs lignes passant par les deux points, il existe une droite ; la seule chose permise, ce serait d'affirmer qu'il se trouve ou non une ligne plus courte que toutes les autres, mais non qu'elle est la plus courte possible.

Les *Éléments* d'Euclide contiennent au moins une définition qui est en défaut contre cette règle : la définition des parallèles. Plusieurs droites étant tracées dans un plan, il n'y a aucun moyen de reconnaître s'il y en a qui, prolongées indéfiniment, ne se rencontreraient pas. A l'aide de la définition, nous ne pouvons donc ni construire ni reconnaître les lignes parallèles. Mais nous savons, avant d'aborder l'étude des parallèles, que deux droites se coupent quand elles rencontrent une troisième droite et font avec elle d'un même côté des angles internes, dont la somme est différente de deux droites. Par un point quelconque du plan, extérieur à une droite donnée, on peut toujours mener une droite et une seule telle qu'une sécante quelconque coupe ces deux droites en formant avec elles d'un même côté des angles intérieurs dont la somme est égale à deux droits. Postulons que ces deux droites ne se rencontreront pas, et nous venons en possession d'un moyen de construire et de reconnaître les droites parallèles. Ce postulat, complètement nécessaire de la définition, s'énoncera : par un point

extérieur à une droite on peut toujours mener une parallèle à cette droite et l'on n'en peut mener qu'une seule.

La définition géométrique ne doit pas être *circulaire* ; en d'autres termes, le nom de la figure définie ne doit pas entrer dans la définition, soit directement, soit d'une façon déguisée. C'est ainsi qu'on ne peut pas dire : la droite est une ligne de direction constante, parce que pour le constater il est indispensable d'avoir une direction constante, c'est-à-dire une droite.

Bien qu'en général la définition géométrique doive éviter également d'être *négative*, ce n'est pas une faute de l'employer telle si, dans le genre prochain de la figure définie, il n'y a que deux différences spécifiques qui s'excluent l'une l'autre. Aussi la définition suivante est-elle recevable : « La ligne est une longueur sans largeur », parce qu'il n'y a pas de milieu entre « avoir une largeur » et n'en pas avoir.

Enfin, comme toute définition parfaite, la définition génétique indiquera le genre prochain de la figure définie et la différence spécifique, car définir une chose c'est dire en quoi elle convient avec une autre chose déjà connue, — et par là elle rentre dans un même genre avec cette autre chose, — et en quoi elle en diffère. Mais, remarquons-le bien, il s'agit ici du genre prochain et la différence spécifique tels que les conçoit le logicien et non pas tels que les entend le naturaliste. C'est que la définition géométrique est autre que la définition physique : celle-ci est empirique et se compose d'éléments d'observation ; elle peut donc varier à mesure que la science se déve-

loppe ; celle-là est absolue et nécessaire, par conséquent immuable. La raison en est que les conditions de la science sont différentes : nous connaissons l'essence de certaines figures, nous ignorons celle des objets physiques.

Il est vrai, historiquement, que la plupart des théories géométriques ne se sont formées qu'après une longue expérimentation ; sans remonter aux Grecs, on peut citer un grand nombre de théorèmes énoncés longtemps avant d'avoir été démontrés : Galilée avait prouvé expérimentalement que l'aire de la cycloïde est triple de l'aire de son cercle générateur, avant que Pascal et Wallis l'établissent géométriquement. Mais dans la partie de la science mathématique définitivement constituée, l'esprit saisit les relations nécessaires qui unissent les propriétés de chaque figure à son essence. Ces propriétés n'entrent donc point comme composants dans la notion de la figure.

Dans les sciences physiques et naturelles, où l'esprit ne perçoit pas l'essence des choses, mais des éléments d'observation qui se modifient à mesure que la science se développe, en sorte que tel corps considéré jadis comme simple se décompose aujourd'hui en plusieurs éléments et qu'il n'est pas établi que ces éléments soient eux-mêmes indécomposables, les propriétés se juxtaposent pour former la notion d'être physique. Bipède, mammifère, vertébré... sont autant de notes indispensables à l'idée compréhensive d'homme, parce que chacune de ces notes est indépendante des autres. Au contraire, si je définis le triangle : « une figure formée par trois droites qui se coupent telles que l'une de ces droites soit plus petite que la somme des deux autres et plus grande que leur différence », je n'ai

rien ajouté de plus à l'idée de triangle que si je l'avais simplement défini : « la figure formée par trois droites qui se coupent », car je n'ai fait qu'énoncer en outre une conséquence et non un élément de la notion du triangle.

On ne doit donc pas, en géométrie, définir par le genre prochain et la différence spécifique tels que les comprend le naturaliste ; ce sont des cadres d'ordre extensif, fondés sur les éléments secondaires ou propriétés, entrant bien dans la notion que la science naturelle se fait actuellement, *provisoirement*, des réalités, mais non dans la notion essentielle. En mathématiques, c'est la définition essentielle qui est féconde. Aussi ne définit-on pas le triangle un polygone dont la somme des angles est égale à deux droits, car on n'en tirerait rien, pas même qu'il a trois côtés et trois angles ; tandis que, de la définition par les côtés, on déduit que la somme des angles est égale à deux droits.

Définit-on l'homme : « un animal raisonnable », tous ses caractères physiques sont compris dans le mot animal, mais je ne les connais pas encore, parce qu'ils ne découlent pas nécessairement tous de la compréhension du mot animal, et quand un naturaliste m'expliquera que cet être vivant sensitif est un vertébré à respiration pulmonaire, mammifère monodelphe, biman, les caractères qui définissent ces genres et espèces compléteront ma notion première.

Qu'en géométrie, après avoir distingué des surfaces planes et des surfaces courbes, je divise les premières en polygones, cercles... ceux-là en triangles, quadrilatères, pentagones... les triangles en triangle équilatéral, isocèle,

rectangle, scalène, et qu'ensuite je donne cette définition du triangle équilatéral ; un triangle qui a ses trois côtés égaux, du genre polygone, de la classe des surfaces planes, de l'embranchement des surfaces, je n'aurai pas dit plus qu'en le définissant simplement : un triangle qui a ses trois côtés égaux. Les rapports qui unissent le triangle équilatéral au polygone, celui-ci à la surface plane et à la surface en général, ne présentent pour le géomètre aucun intérêt au point de vue de la définition, puisqu'il connaît l'essence du triangle équilatéral.

II. — DÉFINITIONS EUCLIDIENNES DE LA LIGNE DROITE

La définition génétique, seule définition parfaite en géométrie, ne peut s'appliquer aux données premières de la science, puisqu'elle suppose au moins une première figure sur laquelle puissent se baser les constructions qu'elle indique. La géométrie débute donc nécessairement par une ou plusieurs définitions simplement caractéristiques. Euclide et, à son exemple, tous les auteurs de traités ont choisi comme point de départ la ligne la plus simple que l'on puisse imaginer entre deux points quelconques de l'espace géométrique. Cette ligne s'appelle ligne droite, par opposition aux lignes que l'on peut tracer entre ces deux points et auxquelles on donne le nom de lignes. De cette ligne, dont un fil tendu donne une image sensible, l'intuition nous apprend :

1° Que chacun de ses points est avec les deux points

qui la déterminent dans un rapport qui n'est réalisé par aucun autre point de l'espace ;

2° Que l'espace géométrique, tel que nous le concevons, étant homogène, on peut toujours par deux quelconques de ses points faire passer une droite et une seule et la prolonger indéfiniment au delà de chacun de ses deux points, d'où il suit que :

3° Deux droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue ;

4° Et que deux droites différentes ne peuvent avoir qu'un seul point commun.

L'intuition nous apprend, en outre, qu'on peut admettre une surface telle que deux quelconques de ses points puissent être unis par une droite contenue tout entière dans la surface. Cette surface, dont une glace polie donne une image sensible, s'appelle plan. Deux droites situées dans un même plan ont un point commun ou peuvent être prolongées indéfiniment de chaque côté sans se rencontrer jamais ; dans ce dernier cas, on dit que ces droites sont parallèles.

N'ayant pas pu réaliser l'union de toutes les propriétés de la droite à l'une de ces données de l'intuition, Euclide a posé une définition complétée par quatre postulats. Sa définition est ainsi conçue : Une ligne droite est celle qui est semblablement placée par rapport à ses points. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστὶν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἐκαστῆς σημείοις κεῖται. Cette définition, selon M. Delbœuf, « est peu précise, car elle contient le terme non défini de *semblable*. Et puis comment placer la droite semblablement entre ses points ? Ce

serait déjà assez difficile de la placer semblablement entre deux de ses points, et quand on donne deux de ses points, elle est toute placée, comme l'implique la première des demandes qu'on va lire... que d'un point à un autre on puisse toujours mener une ligne droite (1) ». M. Renouvier est d'un tout autre avis : « Cette définition semble obscure, dit-il (2), parce qu'elle est concise, mais comment exprimer plus exactement la forme d'une direction pure dans l'espace ? On ne pourrait en développer l'idée que par des tautologies comme celle-ci : une longueur pure, étendue en une seule dimension sans dévier ou qui ne se place jamais en son cours, de façon à s'étendre en une dimension nouvelle par rapport à ses propres points déjà déterminés de position. Prenons pour terme de comparaison la circonférence. Cette ligne, d'un rayon donné, peut bien être dite la même entre ses points, dans ce sens que son degré de courbure ne varie pas comme il arrive en d'autres courbes dont une dimension s'infléchit plus ou moins vers une seconde (ou peut-être une troisième), en son tracé dans l'espace ; mais elle n'est pas placée ou située d'une manière identique par rapport à ses points, selon qu'on prend ceux-ci à droite ou à gauche du diamètre mené par l'un d'eux : elle passe d'un côté des uns, de

(1) DELBŒUF. L'ancienne et les nouvelles géométries. *Revue philosophique*, t. XXXVIII, 1894, p. 118. La définition que propose M. Delbœuf est la suivante : « La droite est une ligne homogène, c'est-à-dire dont toutes les parties, quelle qu'en soient la longueur, sont semblables. » Il est juste, d'ailleurs, de remarquer qu'il prévient qu'il considère la droite comme une donnée. Cf. La Géométrie euclidienne sans le postulatum d'Euclide, n° 57.

(2) RENOUVIER. Philosophie de la Règle et du Compas. *L'Année philosophique*, 2^e année, 1891, p. 7-8.

l'autre côté des autres, allant ainsi, dans tout son cours, en deux dimensions, et non en une dimension et une direction seulement, comme le diamètre lui-même. Ce ne sont pas ici de grossières pétitions de principe, mais de légitimes moyens d'éclaircissement. »

A cette définition, les géomètres se sont efforcés de substituer une propriété caractéristique, de laquelle on pût faire découler logiquement quelques-uns des postulats qui sont indispensables dans les *Éléments* d'Euclide. La plupart des auteurs classiques depuis Legendre considèrent la droite à la manière d'Archimède et de Proclus, et la définissent : le plus court chemin d'un point à un autre, en admettant que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule droite.

Est-ce bien là réellement une définition ? Est-ce un caractère essentiel de la droite d'être la plus courte des lignes que l'on peut mener entre deux points ? Non pas. Cette proposition, en effet, peut être ainsi énoncée : la ligne droite comparée à d'autres lignes qui ne sont pas droites et qui ont mêmes extrémités est plus courte que ces autres lignes. Mais alors, cette proposition est le résultat d'une comparaison entre la ligne droite et d'autres lignes qui ne sont pas droites. Et puisque toute comparaison présuppose logiquement la connaissance antérieure des termes qu'elle compare, il est évident que la propriété d'être plus courte que les autres lignes qui ont mêmes extrémités n'est pas la première propriété qui soit logiquement comprise dans la notion de la ligne droite. On peut d'ailleurs la déduire de la définition donnée par

Euclide, et ce géomètre lui-même montre que dans un triangle un côté est plus petit que la somme des deux autres, c'est-à-dire qu'une ligne brisée est plus longue que la droite qui joint ses extrémités, d'où, par extension, l'on peut conclure que la droite est la plus courte de toutes les lignes qui ont mêmes extrémités.

D'ailleurs cette proposition, considérée comme définition, ne nous permettrait ni de reconnaître la droite parmi les lignes qui passent par deux points, ni même de savoir si nous l'avons menée, car tous les moyens de comparaison nous feraient seulement connaître s'il y a une ligne plus courte parmi les lignes considérées, et non pas si cette ligne plus courte que toutes les autres est la plus courte possible entre les deux points extrêmes.

M. Liard, à la suite de M. Renouvier, trouve dans cette proposition un axiome qui unit en synthèse la quantité et la position (1). Déjà, au XVIII^e siècle, Kant y avait vu un jugement synthétique. « C'est, dit-il, une proposition synthétique que celle-ci : entre deux points la ligne droite est la plus courte. En effet, mon concept de droite ne contient rien qui se rapporte à la quantité ; il n'exprime qu'une qualité. Le concept du plus court est donc une véritable addition, et il n'y a pas d'analyse qui puisse le faire sortir du concept de la ligne droite. Il faut donc ici encore recourir à l'intuition ; elle seule rend possible la synthèse (2). » Ce n'est point, comme le prétend le philosophe de Königsberg, le concept de *droit* que l'on

(1) LIARD. La Science positive et la Métaphysique, p. 242 et suiv.

(2) KANT. Critique de la Raison pure. Traduction BORN, t. I, p. 60.

compare au concept du *plus court*, mais bien le concept de *ligne droite*. Or, ce dernier est formé de celui de ligne comme genre prochain et d'une différence spécifique exprimée par le mot droite. La *ligne droite* est donc bien une quantité comparable avec le prédicat *le plus court*, la comparaison portant sur « ligne droite » et « le plus court », quantité et quantité ; — et non sur « ligne » et « droite », c'est-à-dire quantité et qualité ; et il n'est pas nécessaire de recourir à l'intuition pour établir cette proposition qui découle directement de la comparaison de la ligne droite avec des lignes non droites ayant mêmes extrémités.

M. Taine construit la ligne droite « en considérant deux points donnés et en remarquant la ligne que trace le premier point lorsqu'il se meut vers le second et vers le second seulement, par opposition à la ligne qu'il trace lorsque, avant de se mouvoir vers le second, il se meut soit vers un autre ou plusieurs autres points, ce qui donne la ligne brisée, soit vers une série infinie d'autres points, ce qui donne la ligne courbe. On voit ainsi que, dans la ligne droite tracée à partir d'un point, le tracé entier, c'est-à-dire la ligne droite elle-même, étant déterminée uniquement et complètement par son rapport avec un seul second point, tous ses caractères, quels qu'ils soient, connus ou inconnus, dérivent uniquement et complètement du rapport qu'il a avec ce seul second point (1) ». De là on peut tirer que la droite est unique entre ces deux points et qu'elle est homogène. « Si, à partir du premier

(1) TAINÉ. De l'Intelligence, 3^e édition, l. IV, c. II, t. II, p. 348-349.

point, on trace une autre ligne qui se meut aussi vers le même second point et vers celui-là seulement, ce second tracé ne fait que répéter exactement le premier, car tous ses caractères, comme tous ceux du premier, dérivent complètement et uniquement du rapport qu'il a, comme le premier, avec ce seul second point; d'où l'on voit que les caractères des deux lignes, connus ou inconnus, sont tous absolument les *mêmes*; en d'autres termes, que ces deux lignes se confondent et n'en font qu'une.» Considérons-nous les diverses parties de la droite, « puisque le tracé entier est complètement et uniquement déterminé par son rapport avec le second point et dérive de là tous ses caractères, chacune de ses portions constituantes est uniquement et complètement déterminée par le même rapport et dérive aussi de là tous ses caractères, sauf un, qui est la propriété d'être telle portion, non telle autre, située à tel ou tel endroit de la ligne, au commencement, à la fin ou au milieu. Par conséquent, si nous faisons abstraction de cette particularité, toutes les portions de la ligne ont exactement les mêmes caractères; en d'autres termes, elles sont *les mêmes*. Effectuons cette abstraction et, pour cela, supprimons l'emplacement particulier d'un fragment de la ligne, en le retirant de l'endroit où il est, de la fin par exemple, pour le transporter ailleurs, par exemple au commencement, et pour le superposer en ce point à la ligne totale. Il se confondra avec la portion sur laquelle il sera appliqué, et deux fragments n'en feront qu'un. D'où il suit qu'une portion quelconque de la ligne droite, retirée de sa place et superposée en un autre point quelconque à la ligne totale, coïncidera rigou-

reusement avec la portion sur laquelle on l'aura appliquée (1). »

La définition donnée par Taine serait bonne, si elle n'impliquait pas la notion de direction ; on ne saurait, en effet, constater si le premier point se dirige vers le second et vers le second seulement, si ce n'est en comparant la ligne qu'il décrit avec une direction fixe, c'est-à-dire avec une ligne droite. Peut-être cependant pourrait-on arriver dans cet ordre d'idées à une définition à peu près suffisante ; M. l'abbé de Broglie en semblait persuadé et invitait les Euclidiens à creuser la notion de la droite au point de vue de la marche uniforme dans un même sens.

Les définitions que nous venons de considérer sont les meilleures que les géomètres euclidiens aient données de la ligne droite. Elles sont déterminées soit par l'un soit par l'autre des deux grands courants géométriques : celui qui s'attache plutôt aux propriétés descriptives des figures, ou celui qui se porte de préférence vers les propriétés métriques. Qu'aucune d'elles ne satisfasse complètement l'esprit et qu'il soit nécessaire de les compléter par des postulats, il n'y a là rien qui puisse nous étonner, puisque la droite est l'une des données de la science géométrique.

III. — DÉFINITIONS NON-EUCLIDIENNES DE LA LIGNE DROITE

Les géomètres non-euclidiens se flattent d'avoir supprimé les postulats, à tout le moins celui des parallèles et celui des deux droites, et d'être arrivés à la définition

(1) Taine. *Ibid.*, p. 349-350.

d'une ligne droite plus générale dont la droite euclidienne serait une espèce particulière. Les travaux des premiers géomètres non-euclidiens ayant conduit à des systèmes logiquement coordonnés, on a cru pouvoir en tirer la conclusion que la notion de ligne droite ne renferme pas nécessairement les propriétés incluses dans ces deux postulats. Nous ne nous arrêterons point à la définition donnée par Lobatschewskij : « *Une ligne droite se superpose à elle-même dans toutes ses positions.* J'entends par là que, si l'on fait tourner autour de deux points de la ligne droite la surface qui la contient, cette ligne ne change pas de place. » (Recherch. géom., n° 1). En détruisant la démonstration tentée par Borelli, Saccheri avait par avance combattu cette définition, et c'est avec raison qu'il dit : « *Linea recta dicitur absolute ad se ipsam, sive in se ipsa, nimirum ita ex æquo jacens inter sua puncta ac præsertim extrema, ut manentibus istis immotis nequeat ipsa revolvi ad occupandum novum locum.* » (Euclid., ab. omn. nœvo..., p. 37).

Selon M. Mansion, dans les *Éléments* d'Euclide, « la définition 5 et les postulats I, II, IV caractérisent le genre DROITE.

« Si l'on y ajoute le postulat V seul, on obtient la définition de la droite *riemannienne* ; le postulat VI seul, celle de la droite *lobatschewskienne* ; les postulats V et VI, celle de la *droite euclidienne*.

« Les propriétés du plan ou, plus généralement, celles de l'espace dépendant essentiellement de celles de la droite, on doit distinguer de même les plans et les espaces *riemanniens*, *lobatschewskiens* et *euclidiens*.

« Les propriétés communes aux trois géométries sont des propriétés des *genres* droite, plan, espace...

« Les postulats V et VI... sont simplement des définitions méconnues, comme l'a très bien dit M. Léchalas. Les postulats V et VI sont indispensables pour distinguer les *espèces* du *genre* droite, rien de plus. Ils ne sont ni contenus dans la définition de la droite générale, ni en contradiction avec cette définition ; ils en sont indépendants (1). »

Si nous cherchons comment il se fait que la définition d'Euclide unie aux postulats I, II et IV puisse être appliquée, non pas à une seule ligne, mais à plusieurs, nous en trouvons la raison dans les développements mêmes de la géométrie euclidienne. La ligne droite γ est considérée comme une ligne telle que dans le plan, par deux points, on n'en peut faire passer qu'une seule, et le plan est la surface telle que par deux quelconques de ses points on peut toujours faire passer une droite qui soit entièrement comprise dans la surface. Or, ces propriétés ne sont pas

(1) MANSION. Premiers principes de la métagéométrie. *Revue néo-scholastique*, août 1896, p. 243-244.

La définition 5 est la définition de la ligne droite donnée par Euclide.

POSTULAT I. — Qu'il soit demandé de mener de tout point à tout point une ligne droite.

POSTULAT II. — Et de prolonger, en ligne droite et en continuité, une droite limitée.

POSTULAT IV. — Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.

POSTULAT V. — Et que si une droite, rencontrant deux droites situées dans un même plan, fait d'un même côté des angles intérieurs dont la somme soit inférieure à deux droits, les deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où la somme est inférieure à deux droits.

POSTULAT VI. — Et que deux droites n'enseignent pas un espace.

spéciales à la droite sur le plan ; elles conviennent à d'autres lignes, sur d'autres surfaces, par exemple, au grand cercle sur la sphère. Euclide, qui connaissait la géométrie de la sphère, a dû se rendre compte que les théorèmes de la géométrie plane qui ne s'appuient pas sur le postulat VI peuvent se démontrer du grand cercle sur la sphère ; aussi a-t-il pris soin de donner des définitions dont il ne déduit pas directement les propriétés des figures, il est vrai, mais qui déterminent suffisamment les objets auxquels ils s'appliquent pour qu'il soit impossible de les confondre avec d'autres objets. Cette détermination, nous la trouvons dans la qualité de *droite* qu'il donne à la ligne qu'il veut définir et dans le mot « semblablement » des définitions de la droite et du plan ; par là le géomètre grec fait appel à une intuition commune à tous les hommes. Qu'ensuite il ne s'appuie pas sur cette définition, mais seulement sur une propriété commune à la droite et à d'autres lignes, c'est absolument son droit, et nous ne pouvons nous prévaloir de ce fait pour prétendre que sa définition s'étend à toutes les figures que peut embrasser la déduction ; nous ne pouvons écarter l'intuition qui est à la base de la définition.

Nous devons concéder à M. Mansion que les propriétés appartenant à la fois aux droites euclidienne, lobatschewskienne et riemannienne ne supposent ni le postulat V ni le postulat VI et qu'elles s'appuient sur les postulats I, II et IV ; mais nous ne pouvons admettre avec lui que ces propriétés, parce qu'elles sont compatibles avec la définition de la droite, prouve que cette définition s'applique à trois espèces de lignes.

Dans sa « Philosophie de la Règle et du Compas » (1), M. Renouvier met admirablement en vue le vice de la définition de la ligne droite chez les géomètres non-euclidiens contemporains. Nous ne pouvons mieux faire que de reproduire cette page magistrale du chef de l'École criticiste française. M. Calinon, dit-il, « commence par donner de la définition euclidienne une idée erronée en prenant pour celle-ci *qu'il ne cite point* une définition qu'il compose lui-même d'après les postulats d'Euclide relatifs à cette ligne, et puis mêlant ces derniers avec celui des parallèles, de façon à aboutir à cette bizarre formule : que la définition de la droite et le postulat des parallèles sont deux propositions qui, réunies, forment la définition de la ligne droite dans la géométrie euclidienne » ! Une ligne, dit-il, peut ainsi « se définir *en deux fois, comme la ligne droite* » : exemple, la parabole qui a d'abord la propriété générale des coniques et qui remplit ensuite une condition particulière. En d'autres termes et en toute matière, il est vrai qu'on définit en nommant un *genre* et une *différence* ; mais encore faut-il ne pas laisser de côté le caractère le plus important de la chose à définir, surtout quand ce caractère est absolument individuel et ne peut se ranger sous aucun genre. Or, c'est le cas de la ligne droite. Après qu'il l'a définie « une ligne telle que par deux points il n'en passe qu'une » — ainsi que selon lui Euclide *paraît la définir* en la complétant par la propriété du parallélisme — « il est démontré aujourd'hui,

(1) P. 57-58. Il y fait allusion à l'article de M. CALINON. Les Espaces géométriques. *Revue philosophique*, juin 1889.

poursuit M. Calinon, qu'il existe une ligne plus générale que la droite euclidienne et définie par la seule propriété que par deux points il n'en peut passer qu'une. Nous voulons dire par là que la droite jouissant de cette propriété peut servir de base à une *géométrie générale* où la déduction se poursuit indéfiniment sans donner lieu à aucune contradiction. » M. Calinon ne fait pas attention qu'il manque à la ligne *plus générale*, définie par la *seule propriété* dont il parle, deux propriétés entièrement caractéristiques et irréductibles, telles qu'il n'est pas possible de regarder la « droite euclidienne comme un cas particulier de la droite générale. Ces deux caractères sont : 1° la qualité de *droit*, la direction, véritable définition d'Euclide; 2° la mesure de la distance, attendu que l'idée de la longueur curviligne, en général, suppose un terme commun de comparaison qui ne peut être pris que dans celle de la longueur rectiligne.

« L'erreur logique de M. Calinon se montre bien à découvert dans cette singularité que sa *droite générale* est en général située sur une surface courbe et par conséquent une droite généralement courbe ! »

Ainsi, certains géomètres non-euclidiens substituent implicitement à la définition d'Euclide un des postulats qui la complètent et, sans tenir compte de l'intuition qui est à la base de cette définition, construisent leur système de déductions; d'autres, se basant explicitement sur ce postulat, prétendent prouver que la définition donnée par le géomètre grec s'étend à certaines lignes de certaines surfaces. Nous savons pourquoi cette extension peut avoir lieu.

Une question reste alors à résoudre : quelle est la valeur intrinsèque des définitions sur lesquelles s'appuient les nouvelles théories ? Car si ces définitions sont plus parfaites que celles de la droite et du plan que donne la géométrie euclidienne, il n'y aura aucune raison de s'en tenir à ce dernier système en ce qui concerne la géométrie des surfaces.

Examinons donc la définition que MM. Calinon et Léchalas posent au début de leurs systèmes (1), aux lieu et place de celle de la ligne droite : la définition de la géodésique d'une surface identique à elle-même, c'est-à-dire d'une surface telle qu'une figure qui y est tracée peut s'y [déplacer sans déformation. Cette ligne est, nous dit-on, une ligne située sur la surface, et telle que par deux points de celle-ci il en passe toujours une et généralement une seule.

Supposons donc que nous connaissons les surfaces identiques, ou tout au moins les plus simples, le plan, la sphère, le cylindre... le cône... euclidiens. Comme nous ne pouvons nous représenter la surface identique en général, on nous permettra, je pense, pour nous rendre compte de la valeur de la définition, d'en faire l'application à quelques cas particuliers.

Soit donc, par exemple, celui du plan euclidien. Sa géodésique, la droite euclidienne, est : une ligne telle que, par deux points du plan, il en passe toujours une et généralement une seule.

(1) CALINON. Étude sur la sphère, la ligne droite et le plan. Nancy, 1881.
— LÉCHALAS. Quelques théorèmes de géométrie élémentaire. *Nouvelles Annales de math.*, décembre 1891.

Une première difficulté vient du mot généralement, absolument proscrit par l'ancienne géométrie, et qui ne s'explique qu'au moment où, dans la suite de la déduction, on fait l'hypothèse que deux géodésiques puissent avoir deux points communs sans coïncider dans toute leur étendue. Puisque cette hypothèse ne convient pas au plan — nous le savons par l'intuition — nous pouvons l'écartier. Il nous reste donc à nous convaincre qu'il peut y avoir une ligne unique de son espèce entre deux points quelconques du plan, et, si nous pouvons arriver à cette conviction, à tracer cette ligne.

Si la définition d'Euclide est obscure, elle donne cependant une idée de la figure : la définition de M. Calinon, au contraire, ne paraît pas apte à susciter une image quelconque, dès que l'on fait abstraction de ses connaissances géométriques, et M. Delbœuf⁽¹⁾ l'a très justement comparée à cette énigme : Quel est le mot français de six lettres qui renferme les cinq voyelles ? Encore est-il plus facile de répondre à cette question et de trouver pour solution le mot « oiseau » que de tracer une droite d'après la définition de M. Calinon. Toute la difficulté revient d'ailleurs, deux points du plan étant donnés, à trouver un troisième point qui fasse partie de la droite, ou à montrer si un troisième point donné est ou non situé sur la droite qui unit les deux premiers. Euclide détermine aussi la droite par deux points, mais il indique de plus comment doit être placé le troisième, et cela dans le mot « semblablement ». C'est ce que MM. Calinon et Léchalas

(1) DELBŒUF. *Op. cit.*, p. 136, note.

n'ont pas vu dans la définition euclidienne, et pourtant c'est la loi de génération seule qui permet d'imaginer une figure quelconque et de la construire. Et c'est parce que la définition donnée par Euclide n'exprime pas cette loi d'une manière suffisante que, dans l'étude de la ligne droite, il a dû recourir à des postulats.

Demandez à un homme ignorant de la géométrie de tracer la courbe telle que, par trois points donnés, il en passe une seule, je ne crois pas qu'il arrive à découvrir quelle est cette courbe ; mais dites-lui que c'est une courbe dont tous les points sont équidistants d'un même point, aussitôt il évoquera l'image de quelque chose de rond, et la figure qu'il tracera, si imparfaite soit-elle, aura les prétentions de ressembler à une circonférence.

Toute figure géométrique pourrait se définir de la même façon par un certain nombre de points : l'ellipse est déterminée par cinq de ses points, la parabole par quatre, et tout polygone par ses sommets, une tangente ou une parallèle par un seul point ; mais une telle définition ne serait suffisante que pour celui qui connaîtrait la loi de génération impliquée dans les termes ellipse, parabole, polygone, tangente ou parallèle : mais alors elle lui devient inutile puisqu'en partant de cette loi, comme définition, il peut établir le nombre de points qui détermine chaque figure.

La définition de la géodésique, dans le cas du plan, est donc absolument insuffisante, et des considérations précédentes il ressort assez clairement qu'elle ne convient pas mieux dans le cas des autres surfaces identiques, car la difficulté est toujours de trouver un troisième point de la ligne ou d'établir si un point donné se trouve ou non

situé sur cette figure. Et cette difficulté se complique dans un grand nombre de cas ; sur la sphère il y a une exception prévue : quand les deux points sont opposés l'un à l'autre ; sur le cylindre ou le cône, l'exception est plus générale que la règle : entre deux points non situés sur une même génératrice du cylindre, il y a deux géodésiques, suivant qu'on se dirige d'un côté de la génératrice sur laquelle se trouve le premier point ou du côté opposé, et nous n'avons aucune raison de choisir l'un plutôt que l'autre. Sur la sphère, il y a deux arcs de grand cercle entre deux points donnés, mais on est convenu implicitement de choisir le plus petit ; pour les géodésiques du cylindre, on ne peut faire une telle convention, ces géodésiques n'étant pas des arcs d'une même hélice, mais bien de deux hélices distinctes que nous sommes supposés ne pas savoir comparer. Sur un cône très effilé, une géodésique indéfinie peut faire plusieurs fois le tour de la surface, se coupant elle-même à plusieurs reprises. Quel chemin faudra-t-il suivre entre deux des points de rencontre ?

Il semble évident que les néo-géomètres sont obligés de compléter leurs définitions par une série d'hypothèses correspondant aux différents cas qui se présentent dans la réalité ; bien plus, leurs définitions supposent déjà une certaine connaissance de la géométrie euclidienne, car il paraît à peu près impossible de concevoir et d'imaginer directement les surfaces telles qu'une figure qui y est située peut s'y déplacer sans déformation (1).

(1) Ce chapitre a été publié dans la *Revue de philosophie*, octobre 1902. p. 768-786.

CHAPITRE V

LA QUATRIÈME DIMENSION

Des objets matériels qui nous entourent, nous tirons — par abstraction — les notions d'espace géométrique à trois dimensions et de figures ou d'espaces à une, deux ou trois dimensions, qui sont les déterminations de cet espace. Là s'arrêtent les abstractions que nous suggèrent les données des sens, et nous ne parvenons pas à imaginer une figure qui aurait quatre dimensions ; mais l'impossibilité de nous représenter une telle figure ne nous empêche pas de raisonner comme si elle était un objet d'expérience, d'étendre à la quatrième dimension les analogies que nous trouvons entre les figures à une ou deux dimensions et les figures à trois dimensions : ces analogies sont de trois espèces différentes : les unes sont géométriques, d'autres analytiques, d'autres enfin projectives.

I. — ANALOGIES GÉOMÉTRIQUES

Les analogies géométriques peuvent se ramener à quatre, suivant que l'on considère dans les figures la posi-

tion d'un point, leur génération, leurs intersections ou les relations métriques.

Sur une ligne droite, la position d'un point se détermine par sa distance à un point fixe de la ligne ; dans un plan, par sa distance à deux droites fixes ; dans l'espace, par sa distance à trois plans fixes. Par analogie on dira que dans l'hyperespace la position d'un point est déterminée, par sa distance, à quatre espaces fixes.

La manière la plus simple de considérer la génération des figures nous conduit à une seconde analogie. Un point mobile, par son mouvement, engendre une ligne ; le lieu d'une ligne qui se déplace est une surface, figure à deux dimensions : enfin, la surface, en sortant de son lieu, engendre un solide, figure à trois dimensions. Nous dirons donc que le mouvement d'un solide dans l'espace à quatre dimensions produit un hypersolide, figure à quatre dimensions.

Sur une surface, l'intersection de deux lignes est un point ; dans l'espace deux surfaces se coupent suivant une ligne. Il nous est donc permis d'en inférer que dans l'hyperespace, deux solides se coupent suivant un espace.

Dans cette analogie, il se produit un fait très digne d'attirer notre attention. Dans les cas précédents, nous considérons dans l'hyperespace des figures qu'il est impossible d'imaginer ; dans le cas présent, nous avons des figures de l'espace à trois dimensions. C'est que chacune des figures étudiées comprend une dimension de moins que l'espace dans lequel elle se trouve située ; et pourtant nous ne pouvons nous représenter l'intersection de deux solides dans l'hyperespace. Cela tient à ce que nous sommes obli-

gés d'en situer l'image dans notre espace et que toute intersection a le même nombre de dimensions que les figures qui se coupent si l'espace dans lequel elle a lieu n'a pas lui-même plus de dimensions. Ainsi l'intersection de deux triangles dans leur plan est une surface, et celle de deux volumes dans l'espace, un volume. D'où nous devons admettre par analogie que l'intersection de deux hypersolides dans l'hyperespace est aussi un hypersolide.

Certaines relations métriques permettent aussi de déterminer quelques propriétés de figures à quatre dimensions. En géométrie euclidienne la diagonale du carré est au côté comme $\sqrt{2}$ à l'unité : celle du cube, comme $\sqrt{3}$ à l'unité ; par analogie, celle de l'hypercube, figure à quatre dimensions, dont les côtés sont égaux et les angles droits, sera comme $\sqrt{4}$ à l'unité. Il nous est d'ailleurs impossible de nous représenter l'hypercube.

Pour nous rendre compte de la valeur des théories sur l'hyperespace basées sur les considérations précédentes, il est nécessaire de comparer la genèse des notions de volume, surface, ligne et hypersolide.

La notion de volume est tirée directement — par abstraction — des objets matériels qui nous entourent : entre autres propriétés, ils ont tous celle d'occuper une certaine étendue, et c'est cette étendue qui détermine le *volume du corps*. Les notions de surface et de ligne viennent également des objets matériels : c'est ainsi que l'on considère seulement la superficie d'un champ ou la longueur d'un fil, bien que la superficie du champ ne puisse exister indépendamment du globe terrestre qui le supporte, et que le

fil possède une certaine épaisseur ; de même en géométrie, les surfaces peuvent être étudiées indépendamment des volumes, et les lignes indépendamment des volumes et des surfaces.

Un volume quelconque est déterminé dès que l'on connaît la position de chacun de ses éléments par rapport à trois plans qui se coupent orthogonalement ou, ce qui revient au même, par rapport aux trois droites intersections de ces plans. C'est pourquoi l'on dit que cette figure est étendue en trois dimensions. De même on détermine la position d'une figure tracée sur une surface en établissant la position de chacun de ses éléments par rapport à deux lignes, convenablement choisies sur la surface, et l'on peut dire que cette figure, comme la surface elle-même, n'est étendue qu'en deux dimensions. A proprement parler, le plan est la seule surface à deux dimensions, puisque c'est la seule sur laquelle on puisse déplacer une droite parallèlement à elle-même de façon que chacun de ses points décrive une droite, et qu'en dernière analyse, toute mesure se ramène à des considérations de lignes droites ; mais, comme sur une surface quelconque il ne peut y avoir en un point donné qu'une courbe orthogonale à une courbe donnée, on est convenu d'étendre le sens du mot dimensions à ces courbes et c'est pourquoi l'on peut dire, bien qu'à strictement parler l'expression soit impropre, qu'une surface n'est étendue qu'en deux dimensions.

L'hyperespace ne correspond à aucune abstraction ; nous ne pouvons *imaginer* de corps à quatre dimensions, ou si l'on préfère, il nous est impossible de concevoir que

par un point quelconque on puisse faire passer quatre droites différentes se coupant orthogonalement. Dans le cas des espaces à une ou deux dimensions, nous retranchions quelque chose à l'espace géométrique : dans celui de l'hyperespace nous lui ajoutons au contraire quelque chose qu'il ne peut recevoir, étant déjà déterminé complètement par trois dimensions. Que Dieu puisse créer un monde où les relations spatiales seraient tout autres que dans notre monde actuel, certains philosophes l'admettent ; quoi qu'il en soit, dans les conditions d'exercice de l'intelligence humaine, nous ne pouvons nous figurer l'hyperespace que sous la forme d'un ensemble de symboles où figurent quatre variables indépendantes.

II. — ANALOGIES ANALYTIQUES

C'est à un résultat semblable que conduisent les analogies analytiques. La géométrie analytique considère la position des éléments ou mieux les lois de construction des figures et elle a pour but d'exprimer ces lois par des relations algébriques qui deviennent alors des symboles abstraits des figures.

Plusieurs systèmes ont été inventés pour déterminer la position d'un point P . Dans le plan, par exemple, l'on considère tantôt les segments déterminés sur des axes fixes par des droites parallèles à ces axes menées par le point P ; tantôt la distance du point P à un point fixe O et l'angle de la droite OP avec une direction fixe ; tantôt les angles que font avec la droite qui joint deux points fixes O et O' ;

les droites qui unissent le point P aux deux points O et O' En dernière analyse tant dans l'espace que dans le plan, ces systèmes se ramènent tous à considérer certaines lignes ou certains angles qui déterminent la position du point et que l'on appelle *coordonnées* de ce point. Ces lignes et ces angles étant mesurables, on substitue à leur considération celle de leur mesure, ce qui permet d'exprimer algébriquement les coordonnées du point.

Considérons, par exemple, le cas des coordonnées rectilignes rectangulaires en géométrie plane. Sur une droite indéfinie OX , un point A est déterminé par sa distance à un point fixe O de la droite et tous les points de la perpendiculaire élevée en A sur OX ont pour projection sur cette droite le point A lui-même. Menons donc par le point O la droite OY perpendiculaire à OX ; nous appellerons *abscisse* et *ordonnée* d'un point P du plan les projections OA et OB de la droite OP qui joint le point P au point O , respectivement sur les droites OX et OY . Ces deux droites forment au point O quatre angles dans chacun desquels il y a un point distant du point O d'une longueur égale à OP , et dont les projections sont égales respectivement à OA et OB ; nous distinguerons ces quatre points en convenant de considérer les coordonnées à partir du point O comme positives dans un sens et négatives dans le sens opposé.

La géométrie analytique comprend deux sortes de problèmes : 1° représenter par des formules algébriques une figure donnée ; 2° réciproquement, déterminer la figure représentée par des formules algébriques données.

Pour résoudre un problème de la première espèce, on considère un point qui se déplace en décrivant la figure ; ses coordonnées passent par différentes valeurs et c'est la formule qui exprime leurs variations qu'il s'agit d'établir. Soit, par exemple, à trouver l'équation d'une droite AB, située dans un plan, et telle qu'elle rencontre les deux axes de coordonnées, celui des abscisses à une distance OAa de l'origine, celui des coordonnées à une distance OB = b. Soit P un point quelconque de la droite AB, dont je représente les coordonnées inconnues par x et y. Soit PM = y la perpendiculaire abaissée du point P sur l'axe OX. La considération des triangles semblables BOA et PMA permet d'établir le rapport.

$$\frac{AM}{MP} = \frac{AO}{OB},$$

ou

$$\frac{a-x}{y} = \frac{a}{b},$$

formule qui peut aussi s'écrire

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

telle est l'équation qui représente la droite AB.

Toute ligne plane peut être ainsi représentée par une équation algébrique ou transcendante portant sur deux variables indépendantes. Les cas les plus simples sont celui de la ligne droite, dont le symbole en coordonnées rectilignes rectangulaires est une équation algébrique entière du premier degré et celui des sections coniques auxquelles correspondent dans le même système de coordonnées les équations algébriques entières du second degré.

Considère-t-on les figures comme situées dans l'espace, on peut de même les représenter par une ou plusieurs équations portant sur trois variables indépendantes, qui sont par exemple les mesures des projections sur trois axes fixes se coupant orthogonalement en un seul point de la droite qui joint ce point à un point quelconque de la figure. Dans ce système de coordonnées, les surfaces sont représentées par une seule équation ; les courbes par deux équations et les points par trois. Les cas les plus simples sont celui du plan dont le symbole est une équation algébrique entière du premier degré ; celui de la droite qui peut être considérée comme l'intersection de deux plans et est représentée par leurs équations simultanées ; celui des quadriques auxquelles correspondent des équations algébriques entières du second degré.

Le géomètre applique ainsi l'algèbre à l'étude des figures ; et comme cette science considère les relations que l'on peut établir entre les quantités variables, de quelque nature que soient les objets auxquels ces quantités se rapportent, les transformations des équations qui symbolisent une figure pourront recevoir une interprétation sur cette figure.

Le plan étant représenté en coordonnées rectilignes par une équation du premier degré à trois inconnues x, y, z , si je détermine deux de ces inconnues x et y en leur attribuant des valeurs constantes, il restera une équation donnant pour la troisième inconnue z une valeur également constante K . L'équation $z = K$ représente le lieu des points du plan situés à une distance K du plan formé par les axes auxquels se rapportent les variables x et y ,

c'est donc la droite parallèle à ce plan située à une distance K .

Toutes les transformations des équations ne peuvent s'interpréter aussi simplement. L'algèbre ne considère pas seulement des quantités réelles; certaines transformations aboutissent à des quantités imaginaires, c'est-à-dire à des expressions dans lesquelles entre en facteur le signe $\sqrt{-1}$ qui n'a pas de sens par lui-même, mais qu'on est convenu de traiter suivant certaines règles n'impliquant pas contradiction, afin de faciliter les transformations des quantités algébriques. Quand la recherche par l'analyse des propriétés d'une figure conduit à un résultat imaginaire, nous devons en conclure que l'hypothèse a été faite à tort, qu'il n'y a pas de solution géométrique.

Deux ellipses, par exemple, peuvent se rencontrer en quatre points au maximum. L'analyse donne toujours quatre solutions communes aux équations qui les représentent. Si ces solutions sont réelles et différentes, les deux ellipses se coupent en quatre points dont les coordonnées sont déterminées par les solutions, si deux solutions réelles sont égales, c'est qu'au point correspondant, les ellipses sont tangentes l'une à l'autre; si deux solutions sont imaginaires, les ellipses ne se coupent qu'en deux points; et si les quatre solutions sont imaginaires, les ellipses ne se rencontrent pas.

On s'aperçoit bientôt que si l'algèbre facilite l'étude de la géométrie en substituant à la considération de figures celles des relations de quantités, réciproquement la géométrie facilite l'étude de l'algèbre, en remplaçant les

quantités abstraites par des figures qui se prêtent davantage à l'intuition.

En algèbre, par exemple, un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admet en général une solution réelle. D'après les conventions précédentes, au lieu d'énoncer cette proposition abstraite, je pourrais dire, d'une façon en même temps plus courte et plus intuitive, que deux droites situées dans un même plan se coupent généralement en un point. La relation entre les deux propositions n'ayant plus lieu quand le système algébrique admet une solution imaginaire, on complète la convention en disant que dans ce cas les deux droites se coupent en un point imaginaire, ce qui permet d'établir dans tous les cas une relation entre la formule algébrique et la terminologie géométrique. On dira donc dans le cas précédent que deux ellipses se coupent toujours en quatre points réels ou imaginaires.

Un exemple montrera de quelle utilité est cette convention. Comme facilité de langage, on dit donc que deux cercles situés dans un même plan se coupent toujours en deux points réels ou imaginaires. Quand ces deux points sont réels, la droite qui les joint a cette remarquable propriété qu'elle est le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux cercles des tangentes égales ; quand les deux points d'intersection se confondent, c'est-à-dire quand les deux cercles sont tangents, cette droite devient la tangente commune et jouit de la même propriété ; quand enfin les cercles ne se rencontrent pas, la géométrie analytique établit que le lieu des points où l'on peut mener aux deux cercles des tangentes égales est la

droite qui joint les deux points imaginaires d'intersection. Nous pouvons donc dire que dans tous les cas, la droite réelle qui joint les deux points d'intersection de deux cercles jouit de la propriété énoncée.

En résumé, de même qu'en algèbre on introduit les quantités imaginaires pour permettre le développement complet des calculs sur les quantités réelles, de même l'introduction en géométrie de grandeurs imaginaires n'est qu'un procédé artificiel de calcul pour faciliter l'étude des figures réelles.

L'on peut ainsi donner une traduction en langage géométrique de toutes les transformations que l'on fait subir aux équations qui représentent une figure donnée. Le problème inverse de déterminer la figure représentée par des formules algébriques données ne saurait être résolu en général et c'est la même raison qui nous a permis de substituer des considérations algébriques aux considérations géométriques qui nous interdit de faire sans conditions la substitution inverse : l'objet de l'algèbre étant la quantité abstraite en général, la même formule pourra s'appliquer à diverses figures, suivant les conventions adoptées pour l'interprétation des variables. L'équation $y = x^2$ représente tout aussi bien la surface d'un carré de côté x , qu'une parabole en coordonnées planes rectilignes rectangulaires dont la directrice est l'axe des ordonnées, ou même le cylindre parabolique engendré par une droite mobile dont un point décrit la parabole et qui se déplace en restant perpendiculaire au plan. L'une des interprétations géométriques est une aire, l'autre une courbe, la troisième une surface.

Nous touchons là à « la grande absurdité fondamentale de l'effort fait par Riemann pour tirer des inférences sur la nature de l'espace et de l'étendue en partant des représentations algébriques des « multiplicités (1) ». Toute interprétation géométrique d'une formule algébrique repose implicitement sur une convention qui détermine à quelles grandeurs ou fait correspondre les variables qui entrent dans la formule. Jusqu'à trois variables cette correspondance permet de donner aux énoncés plus de brièveté et de simplicité, aux démonstrations un guide intuitif, aux relations et transformations algébriques un ordre qui permet de les grouper d'une façon ingénieuse. Mais au-dessus de trois variables la correspondance cessant, on se trouverait dans la nécessité d'abandonner une méthode qui procure de si grands avantages, si on n'avait inventé une apparence de langage géométrique, pour symboliser les systèmes d'équations à 4, 5... ou n variables. En géométrie analytique, on peut faire correspondre tout système d'équation à deux ou trois variables comprenant autant d'équations que de variables à un point situé sur une surface, s'il y a deux variables ; dans l'espace, s'il y en a trois. Tout système renfermant une équation de moins *représentera* alors une ligne située sur la surface ou dans l'espace ; enfin, toute équation unique à trois variables *représentera* une surface. On convient d'étendre ces analogies aux équations à n variables, mais alors il y a *identité* entre l'expression analytique et l'expression géométrique : « les figures à plus de trois dimensions ne sont

(1) STALLO. La matière et la physique moderne, p. 211.

donc que des noms nouveaux donnés aux équations sans aucune addition nouvelle (1) ». Tout système d'équation portant sur n variables est une figure de l'espace à n dimensions ; tout système de n équation est un point de cet espace ; tout système de $n - 1$ équations, une ligne ; tout système de $n - 2$ équations, une surface..., et enfin, une seule équation à n variables, une figure étendue suivant les n dimensions de l'espace considéré.

III. — ANALOGIES PROJECTIVES

La géométrie à quatre dimensions s'appuie encore sur des analogies tirées de la géométrie projective. Cette science qui est à la géométrie ordinaire ce qu'en algèbre la théorie des fonctions de variables est à celle des relations entre quantités fixes, a pour but l'étude des figures par la considération des figures plus simples obtenues en les projetant suivant certaines règles. Elle se base sur le fait que telles ou telles propriétés d'une figure se manifestent dans les projections de cette figure, et que d'une projection donnée on peut conclure à certaines propriétés de la figure projetée. On prévoit dès maintenant les avantages de cette méthode : « Par la projection des figures planes sur des droites, on réduit l'examen des relations de ces figures à celui des relations beaucoup plus simples entre les distances comprises sur les axes de projection ; au lieu de deux dimensions, on n'en a souvent plus qu'une

(1) CALINON. *Revue philosophique*, t. XXXII, p. 374.

à considérer, ou, si l'on en a deux, elles sont toujours mesurées dans les directions parallèles ou sur les mêmes droites ; des réflexions analogues sont applicables aux coordonnées dans l'espace (1). »

La géométrie descriptive, par exemple, est une sorte de géométrie projective qui considère simultanément les projections des figures de l'espace sur deux plans coordonnées orthogonaux, et de l'étude de ces projections conclut à des relations qui se vérifient sur la figure de l'espace.

Les cartes géographiques sont une des applications les plus connues des théories projectives. On les obtient en projetant au moyen de droites concourantes sur une surface développable convenablement choisie les divers éléments de la surface de la terre. Veut-on une carte exacte des régions équatoriales, on peut imaginer un faisceau de rayons émanant du centre de la terre et prolongés au delà de la périphérie jusqu'au cylindre droit ayant pour base l'équateur. C'est le système de Mercator, système dans lequel les méridiens correspondent aux génératrices du cylindre : les parallèles, aux sections normales perpendiculaires à ces génératrices. Ce système a l'inconvénient de déformer les figures d'autant plus sensiblement qu'elles sont plus éloignées de l'équateur. Se propose-t-on la représentation exacte d'une région voisine d'un des pôles, on devra recourir à une autre méthode, par exemple, celle des projections stéréographiques, qui consiste à projeter sur le plan de l'équateur, le point de

(1) PONCELET. Traité des propriétés projectives. Introduction.

vue étant au pôle opposé à la demi-sphère qui comprend la région à projeter.

Ces exemples donnent de la géométrie projective une idée suffisante pour permettre de comprendre l'application qui en a été faite à la quatrième dimension. Si des certaines propriétés des figures rectilinéaires on peut conclure à des propriétés de figures planes dont elles sont les projections, et si les mêmes lois s'appliquent aux figures planes par rapport aux figures de l'espace à trois dimensions, pourquoi ne considérerait-on pas ces dernières comme les projections de figures étendues suivant quatre dimensions ? Et puisque nous n'avons aucune intuition de ces figures, cette méthode permet d'en étudier les propriétés, de contrôler les résultats fournis par la méthode analytique, et de dire : s'il y avait un espace à quatre dimensions compatible avec les données de notre espace, les figures de cet espace auraient telles ou telles propriétés.

La géométrie projective donne aux géomètres non-euclidiens un moyen de représenter celles de leurs figures que nous ne pouvons imaginer dans notre espace, et même la pseudo-sphère, qui n'est pour nous qu'une relation analytique.

Soit une sphère et son plan tangent en un point que nous appellerons le pôle de la sphère. Supposons que nous projetions sur le plan tangent les points de l'hémisphère tangent par des droites passant par le centre de la sphère. A chaque point d'une des surfaces correspondra un point sur l'autre surface ; à chaque ligne, une ligne ; à chaque géodésique, une géodésique ; les éléments de

longueur et d'angle sur le plan seront reliés aux éléments de longueur et d'angle sur la sphère par des relations analytiques qui permettront de faire la théorie de la sphère indirectement par la considération de ces relations et de la théorie du plan. Par des considérations analogues, Beltrami a montré que l'on peut représenter idéalement la pseudo-sphère dans le plan à l'intérieur d'un cercle concentrique au pôle, ce cercle correspondant aux points à l'infini de la surface pseudo-sphérique, et les points du plan extérieurs au cercle ne correspondant pas à cette surface. Deux droites parallèles de la surface sont représentées par deux droites qui se coupent sur la circonférence. Nous retrouvons dans cet exemple les conventions que nous avons déjà rencontrées dans les théories de la géométrie analytique, et nous devons distinguer les représentations de figures réelles qui sont de véritables projections et les représentations de figures imaginaires, qui sont pur symbolisme de relations analytiques. Les ingénieux systèmes de M. Klein pour projeter les figures de la géométrie non-euclidienne à l'intérieur de surfaces du second degré n'ont d'autre valeur au point de vue philosophique que d'être des symboles intuitifs des relations analytiques spéciales à chacune de ces géométries.

Pour que les analogies précédentes fussent admissibles, il faudrait prouver, ce nous semble, que l'existence d'une quatrième dimension est compatible avec les notions d'espace à trois dimensions et de ligne droite telles que nous les concevons. Pour ceux qui, avec les géomètres non-euclidiens, n'admettent que la déduction comme

critérium du bien-fondé d'une théorie géométrique, et surtout pour ceux-ci, qui ont constitué leurs systèmes à deux ou trois dimensions indépendamment l'un de l'autre, l'hypothèse d'un espace à quatre dimensions est logiquement nécessaire. D'aucuns philosophes voient une véritable contradiction dans cette hypothèse ; d'autres, au contraire, la croient compatible avec la notion de ligne droite, et dans ce cas, l'hyperespace serait possible, sinon réalisé. Les tenants de la quatrième dimension s'appuient sur certains phénomènes d'optique, de magnétisme, de spiritisme même, dont elle donne, disent-ils, la seule explication suffisante : mais il ne semble pas qu'ils soient arrivés à des conclusions qui s'imposent. « Rien ne fait présumer, dit M. Schlegel... que notre univers se trouve dans un espace à quatre dimensions existant réellement comme un plan dans un espace à trois dimensions. Il est vrai que Bresch a formulé une hypothèse analogue pour expliquer certains faits chimiques. D'après Most, aucun fait physique ne nécessite une telle hypothèse. Simony y oppose des considérations sur la matière (1). »

IV. — L'ARGUMENT DE HELMHOLTZ

Reste un dernier argument, énoncé par Helmholtz et

(1) V. SCHLEGEL. La Géométrie à n dim. *Enseignement math.*, II^e année, 1900, p. 96. Les ouvrages auxquels il fait allusion sont : BRESCH. *Der Chemismus im Lichte mehr dimensionaler Raumanschauung*. Leipzig, 1882. — MOST. *Neue Darlegung der absolute Geometrie und Mechanik, mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen der Weltraumer*. *Progr. Coblenz*, 1883. — SIMONY. *Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze*. *Wien-Anzeig*, 1882.

tendant à montrer que nous avons les mêmes raisons d'admettre l'existence de la quatrième dimension qu'un être vivant sur une surface aurait de supposer l'existence de l'espace à trois dimensions. Voici l'argument. Supposons que dans une surface quelconque, un plan par exemple, vivent des êtres doués de raison, et que ces êtres intelligents soient arrivés à faire la géométrie de leur univers ; ils posséderont toute notre géométrie plane à l'exception des théorèmes qui supposent le retournement. Ils connaîtront la ligne droite, la circonférence, les parallèles, les triangles et la théorie de la similitude, mais n'auront aucune idée des volumes, puisque par hypothèse ils ne connaissent que leur monde plan. Or l'un de ces êtres, après avoir remarqué que les figures symétriques rectilinéaires peuvent être amenées à coïncider par un retournement dans l'espace plan, tandis que les autres figures symétriques ne peuvent jamais se recouvrir par coïncidence des éléments égaux, se demande pourquoi il en est ainsi, et ne tarde pas à reconnaître que cette anomalie disparaîtrait s'il disposait d'un espace à trois dimensions dans lequel une figure courbe pourrait se retourner, comme la figure rectilinéaire dans l'univers plan. Le même raisonnement peut s'appliquer au cylindre, au cône et à toutes les surfaces développables sur le plan, et il est permis de supposer de même des êtres intelligents vivant sur des surfaces sphériques ou pseudo-sphériques, en faisant la géométrie et arrivant à faire l'hypothèse que leur univers fait partie d'un système à trois dimensions.

Nous sommes dans l'espace comme ces êtres dans leur

surface, et nous avons logiquement les mêmes raisons d'admettre pour notre espace une dimension de plus que celles que nous connaissons. Pourquoi donc nous refuserions-nous à admettre dans notre système, ce que nous reconnaissons comme parfaitement raisonnable dans celui des êtres à deux dimensions !

La réponse à cet argument repose sur la distinction entre l'ordre logique et l'ordre réel. Ceux qui le soutiennent disent, avec Helmholtz, qu'il n'y a aucun empêchement logique, soit ; mais il y a une impossibilité matérielle. Nous ne pouvons imaginer l'être à deux dimensions se déplaçant dans une surface que comme un être de raison, c'est-à-dire, une pure création de notre esprit, et non comme un être matériel, car alors il aurait trois dimensions et nous serions en dehors de l'hypothèse. L'argument est donc un argument purement logique, et suivant l'axiome philosophique, ses conclusions ne valent pas pour l'ordre réel.

Aucun argument n'a jamais été énoncé, qui nous force à admettre l'existence de l'hyperespace ou même sa possibilité. La plupart de ceux qui parlent de la quatrième dimension n'ont certes pas d'autre prétention que celle d'employer une *apparence* de langage géométrique qui facilite l'étude de formules algébriques assez arides par elles-mêmes et ne croient pas plus à l'existence des figures de l'hyperespace qu'à celle des figures imaginaires. D'aucuns prennent dans cette question une position différente, et suivant l'exemple de Riemann et de Helmholtz, admettent la réalité de l'hyperespace. C'est à ceux-là que

s'adresse l'argument *ad hominem* que nous empruntons à Taine et par lequel nous terminerons cet exposé. Il nous semble bien résumer la question et la placer sur son véritable terrain : la science physique.

« Dans le réceptacle fictif, au delà de la troisième dimension, nous ne pouvons en imaginer une quatrième ; cela ne prouve pas que, dans le réceptacle réel, il n'y en ait pas une quatrième. Tout au rebours ; il y a même des indices en sens contraire ; car, si l'on ne peut imaginer géométriquement une quatrième dimension, on peut l'exprimer algébriquement, grâce à l'analogie des dimensions et des puissances, et la vraie raison que nous avons pour refuser à l'espace réel la quatrième dimension est encore une analogie. Dans l'espace réel, chaque dimension est influente. Placez des corps pesants sur une ligne droite, c'est-à-dire selon la première dimension : ils se meuvent d'une certaine manière. Placez un autre corps pesant hors de la ligne droite, dans le plan, c'est-à-dire selon la seconde dimension ; le mouvement des corps situés sur la ligne droite se modifie. Placez enfin un dernier corps hors du plan, c'est-à-dire selon la troisième dimension ; le mouvement des corps situés sur le plan se modifie encore. Ayant la même nature, la quatrième dimension aurait la même influence ; si elle existait, dans le mouvement des corps pesants observé et calculé selon les trois premières dimensions, nous trouverions des perturbations que nous n'y trouvons pas (1). »

(1) TAINE. De l'Intelligence, 4^e édition, s. II, liv. IV, ch. II, p. 377-378.

CONCLUSION

« L'esprit réclame deux choses d'une construction scientifique : la *rigueur* et la *puissance explicative*. La rigueur est parfaite si les démonstrations sont telles que l'esprit se reconnaisse obligé, en vertu de ses lois propres et non en vertu de données qui lui sont étrangères, d'assentir aux conclusions énoncées. La puissance explicative est parfaite si l'enchaînement des idées est tel que l'esprit se trouve contraint, de par la nature même des faits extérieurs, à l'accepter comme imposé. Ces deux qualités sont bien distinctes : il est facile de le montrer sur un exemple. Prenons en effet la question de l'existence de l'intégrale définie. Dans une première théorie, on pose *a priori* une somme dont on prouve ensuite qu'elle a une limite qu'on appelle intégrale : ici la rigueur est parfaite, mais la satisfaction de l'esprit pourtant n'est complète ni achevée parce que la raison ne se sent guidée par les choses extérieures qu'elle veut comprendre ni dans le choix des concepts qu'elle construit ni dans la succession des opérations qu'elle fait et qu'il lui semble donc aller

au hasard comme pour une sorte de jeu stérile. Une autre théorie au contraire repose sur l'intuition de l'aire d'une courbe et joue la raison, dès qu'elle regarde le dehors et entend rester d'accord avec les données extérieures, à considérer une certaine somme — la même d'ailleurs que plus haut — et à croire qu'elle a une limite : cette fois, la puissance explicative est parfaite, mais c'est la rigueur qui manque.

« Non seulement la rigueur et la puissance explicative sont choses distinctes, mais elles semblent même opposées. Il est bien difficile de les concilier : l'histoire de la science prouve que, le plus souvent, on n'assure l'une qu'au détriment de l'autre(1). »

Les mathématiciens modernes préfèrent la rigueur à la puissance explicative, « et le jour n'est peut-être pas loin où la « géométrie numérique » prétendra à l'honneur d'être la seule et unique géométrie. Autrefois, on parlait d'un grand nombre de notions regardée comme primitives, irréductibles et intuitives : telles étaient celles de nombre entier, de fraction, de grandeur continue, d'espace, de point, de ligne, de surface, etc. Aujourd'hui une seule subsiste, celle de nombre entier ; toutes les autres n'en sont que des combinaisons, et à ce prix on atteint la rigueur parfaite(2). » Il y a des gens qui croient savoir ce que c'est qu'une surface ; un vrai mathématicien à l'aurore du xx^e siècle s'élève bien au-dessus de cette notion fondée

(1) LE ROY et VINCENT. Sur l'Idée de nombre. *Revue de métaphysique et de morale*, 4^e année, 1896, p. 739-740.

(2) POINCARÉ. La logique et l'intuition dans la Science mathématique. *Enseignement mathématique*, 1^{re} année, 1899, p. 157.

sur l'intuition et déclare que « l'on ne peut savoir ce que c'est qu'une surface que quand on sait le calcul intégral (1) ». La rigueur est absolue, la puissance explicative est nulle.

Les géométries non-euclidiennes nous apparaissent comme une forme de la science géométrique intermédiaire entre la géométrie d'Euclide, qui cherchait avant tout une correspondance aussi grande que possible entre les formes idéales et les formes réalisées, et cette géométrie numérique qui tend à n'être qu'une œuvre purement logique. Pour nous, qui croyons qu'on doit essayer de réaliser dans la science l'union aussi complète que possible de la rigueur et de la puissance explicative, nous les trouvons dans la géométrie d'Euclide, que l'on doit tendre à perfectionner, non à détruire. Nous ne rejeterons pas pour cela les systèmes non-euclidiens ; ils ont droit à une place dans l'exposé de la géométrie, pour celles de leurs déductions qui correspondent à des figures que nous pouvons imaginer ; dans la géométrie analytique et la géométrie projective, pour les autres figures. Ils y joueront par rapport aux théories du plan et de la droite un rôle analogue à celui de la théorie des coniques par rapport à celle du cercle.

Au point de vue philosophique, ces géométries ont eu l'avantage de forcer les métaphysiciens à reprendre l'étude des fondements de la géométrie et à préciser certaines notions. Elles n'ont apporté aucun nouvel argument aux théories sur le nombre des dimensions de l'espace, mais

(1) POINCARÉ. *Ibid.*, p. 158.

elles ont, en quelque sorte, fourni la preuve par l'absurde de la nécessité des postulats V et VI à la base de la géométrie de la droite. La suite du développement de ces systèmes prouve, en effet, que, sous le nom de droite, ils étudient des figures qui ne sont pas la droite du sens commun. Par conséquent, la définition de cette figure est incomplète si elle ne renferme pas ces deux postulats.

En terminant ce travail, qu'il me soit permis d'adresser mes plus sincères remerciements au R. P. Schlincker, O. P., professeur de philosophie au Lycée de Fribourg, dont les précieux conseils et les encouragements m'ont été d'une si grande utilité dans le cours de mes études philosophiques et spécialement dans la préparation de cette thèse ! Qu'il daigne agréer l'expression de ma gratitude la plus profonde !

OUVRAGES A CONSULTER

- BELTRAMI. — Saggio di interpretatione della Geometria non-euclidea. *Giornale di matematiche*, VI, 1868.
- Theoria fondamentale degli Spazi di curvatura costante.
En traduction française, par J. HOUËL :
- Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidienne. *Annales de l'École normale supérieure*, IV, 1869.
- Théorie fondamentale des espaces à courbure constante. *Id.*, VI, 1869.
- BOLYAI J. — Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens : a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidii (*a priori* haud unquam decidenda) independentem ; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. *Dans l'ouvrage de son père, W. Bolyai: Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos... introducendi...* Maros-Vásárhely, 1832.
- *En traduction française, par J. HOUËL :*
- La science absolue de l'espace, par J. Bolyai, précédée d'une notice sur la vie et les travaux de W. et J. Bolyai, par M. Fr. Schmidt. *Mémoires de la Société des Sciences phys. et nat. de Bordeaux*, V, 1867.

BOLYAI J. — *Id.* Tirage à part. Paris, Gauthier-Villars, 1867.

— Réédition du texte de J. Bolyai et des remarques de W. Bolyai. Paris, Hermann, 1896.

DE BROGLIE. — La géométrie non-euclidienne. *Ann. de philosophie chrét.*, avril et juillet 1890.

CALINON. — Étude sur la sphère. Nancy, Berger-Levrault, 1888.

— Introduction à la géométrie des espaces à trois dimensions. Paris, Gauthier-Villars, 1891.

— La géométrie à deux dimensions des espaces à courbure constante. Paris, Gauthier-Villars, 1895.

— Étude sur l'indétermination géométrique de l'Univers. *Revue philosoph.*, XXXVI, déc. 1893.

DELBŒUF. — L'ancienne et les nouvelles géométries. *Revue philosoph.*, XXXVI, nov. 1893 ; XXXVII, avril 1894 ; XXXVIII, août 1894.

— La géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide. Paris, Hermann, 1897.

ENGEL (F.) — Gauss, die beiden Bolyai und die nicht-euklidische et STÄCKEL (P.). *Geometrie. Mathematische Annalen*, XLIX, 1897.

En traduction française, par LANGE :

— Gauss, les deux Bolyai et la géométrie non-euclidienne. *Bull. des Sciences math.*, XXI, 1897.

— *Id.* Tirage à part. Paris, Gauthier-Villars, 1897.

— Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss. Leipzig, Teubner, 1895 (*Cet ouvrage contient, outre de nombreux renseignements historiques sur le développement de la géométrie non-euclidienne avant Lobatschewskij, une traduction commentée de l'« Euclides » de Sacheri, ainsi que le texte des recherches de Lambert et de Taurinus.*)

ENGEL (F.) — Urkunden zur Geschichte der Nicht-Euklidischen et STÄCKEL (P.). *Geometrie.* Leipzig, 1899 (*Cet ouvrage fait suite au précédent et est conçu d'après un plan*

analogue. Le premier volume est consacré à Lobatschewskij. Le second volume, qui n'est pas encore paru, sera consacré à Bolyai).

HALSTED. — Bibliography of Hyperspace and Non-Euclidean Geometry. *American Journ. of Mathematics*, I, 1878, et II, 1879.

HOÜËL. — Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie. Paris, Gauthier-Villars, 1867.

— Notice sur la vie et les travaux de Lobatschewskij. *Bolletino di bibliographia e di storia delle scienze matematiche et fisiche*, II, mai 1869. — *Bull. des Sciences math.*, I, 1870.

— Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulat d'Euclide. *Mém. de la Soc. des Sciences phys. et naturelles de Bordeaux*, VIII, 1870.

— Cf. Beltrami, Bolyai, Lobatschewskij.

KLEIN. — Nicht — Euklidischen Geometrie. 2^e éd., 2 vol. Leipzig, 1893.

— Ueber die Sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen*, août 1871. — *Math. Ann.*, IV.

En traduction française :

— Sur la géométrie dite non-euclidienne. *Bulletin des Sciences math. et astr.*, II, 1871.

KLEIN. — Conférences sur les mathématiques... (trad. Langel). Paris, Hermann, 1898.

LÉCHALAS. — La géométrie générale. *Critiq. philosoph.*, septembre 1889.

— La géométrie générale et l'intuition. *Annales de philos. chrét.*, octobre 1890.

— La géométrie des espaces à paramètre positifs. *Id.*, avril 1891.

- LÉCHALAS. — Étude sur l'espace et le temps. Paris, Alcan, 1896.
- La courbure et la distance en géométrie générale. *Rev. de métaph. et de morale*, IV, 1896.
- Les fondements de la géométrie d'après Russell. *Annales de philosophie chrét.*, octobre, novembre, décembre 1898.
- LIARD. — Des définitions géométriques et des définitions empiriques. Paris, Alcan, 2^e édition.
- LOBATSCHESKIJ. — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinen. Berlin, 1840.
En traduction française, par HOUËL :
- Études géométriques sur la théorie des parallèles, par N. J. Lobatschewskij... suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. *Mémoires de la Soc. des Sciences phys. et nat. de Bordeaux*, IV, 1866.
- *Id.* Tirage à part. Paris, Gauthier-Villars, 1866.
- Réédition suivie du mémoire de Helmholtz sur les faits qui servent de bases à la géométrie. Paris, Hermann, 1895.
- Pangeométrie ou Précis de géométrie fondé sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. Kazan, 1855.
En traduction italienne :
- LOBATSCHESKIJ. — Pangeometria o sunto di Geometria... *Giornale di Matem.*, V, 1867.
- MANSION. — Premiers principes de la métageométrie ou géométrie générale. *Rev. néo-scholastique*, III, mai et août 1896.
- Analyse des recherches du P. Saccheri. S. J. sur le postulat d'Euclide. *Ann. de la Société scientifique de Bruxelles*, XIV, 2^e partie, 1889-1890.
- MILHAUD. — De la certitude logique en mathématiques. Montpellier, 1891.

- MILHAUD. — La géométrie non-euclidienne et la théorie de la connaissance. *Rev. philosoph.*, XXV, 1888.
- POINCARÉ. — Les géométries non-euclidiennes. *Rev. gén. des Sciences*, II, 1891.
- L'espace et la géométrie. *Rev. de métaph. et de morale*, III, 1895.
- Science et hypothèse. Paris, Flammarion, 1902.
- POULAIN. — La géométrie non-euclidienne. *Études religieuses*, LIII, 1891.
- RENOUVIER. — Philosophie de la Règle et du Compas. *L'Année philosophique*, II, 1891.
- RIEMANN. — Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Riemann's Gesammelte mathem. Werke*, par H. Weber, 2^e éd., Leipzig, 1892.
En traduction française :
- Sur les faits qui servent de fondement à la géométrie. *Annali di Matematica*, III₂, 1870.
Trad. Houël.
- *Id.* Paris, Hermann, 1896.
- Œuvres mathématiques (trad. Langel). Paris, Gauthier-Villars, 1898.
- RUSSELL. — An Essay on the Foundations of Geometry. Cambridge, 1897.
Édition française revue et corrigée :
- RUSSELL. — Essai sur les fondements de la géométrie (trad. Cadenat). Paris, Gauthier-Villars, 1901.
- SACCHERI. — Euclides ab omni nævo vindicatus, sive Conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universæ geometriæ principia. Milan, 1733. (Ouvrage fort rare ; nous en connaissons trois exemplaires, l'un à la Bibliothèque nationale, l'autre à la Bibliothèque de la Sorbonne, le troisième à la Bibliothèque de Genève. — Cf. Engel et Stäckel, Die Theorie der Parallellinien, qui citent les Bibliothèques d'Allemagne qui en possèdent un exemplaire ; ils donnent la traduction en allemand de la première partie de cette œuvre.)

- SCHLEGEL. — Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à n dimensions. *L'Enseignement mathématique*, II, mars 1900.
- SCHMIDT. — Lebensgeschichte des ungarischen Mathematiker Johann Bolyai de Bolya... *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, VIII, 1898.
- SCHMIDT et STÄCKEL. — Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Leipzig, Teubner, 1899.
- STÄCKEL. — Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai. *Math. und naturwiss. Berichte aus Ungarn*, XVII, 1901.
- Friedrich Ludwig Wachter. Ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. *Math. Ann.*, LIV, 1901.
- Cf. Engel.
- STALLO. — La matière et la physique moderne. Paris, Alcan, 1884.
- TANNERY. — La géométrie imaginaire et la notion d'espace. *Rev. philosoph.*, II et III, 1877-1878.
- DE TILLY. — Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique. *Mém. de la Société des Sciences phys. et nat. de Bordeaux*, 2^e série, III, 1880.
- VIDAL. — Pour la géométrie euclidienne. Paris, Croville-Morant, 1900.
- WASSILIEF. — Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewskij. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der kaiserlichen Universität Kazan... (trad. allemande de Engel). *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, VII, 1895.
- *Id.* Tirage à part. Leipzig, Teubner, 1895.



CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.